

ÉLÉMENTS
DE
CALCUL DIFFÉRENTIEL
ET DE
CALCUL INTÉGRAL.

CALCUL INTÉGRAL.

615631

2

ÉLÉMENTS
DE
CALCUL DIFFÉRENTIEL
ET DE
CALCUL INTÉGRAL

PAR
ABEL SOUCHON

TOME SECOND
CALCUL INTÉGRAL

PARIS
ARTHUS BERTRAND, ÉDITEUR
LIBRAIRIE MARITIME ET SCIENTIFIQUE
LIBRAIRE DE LA SOCIÉTÉ DE GÉOGRAPHIE ET DE LA SOCIÉTÉ
DE SAUVETAGE MARITIME
21, rue Hautefeuille

—
1870

TABLE DES MATIÈRES.

LIVRE PREMIER.

PRINCIPES GÉNÉRAUX DU CALCUL INTÉGRAL.

	Numéros
CHAPITRE PREMIER. — DES INTÉGRALES DÉFINIES ET INDÉFINIES.	
Définitions et notations.	1
Représentation géométrique de l'intégrale définie.	4
Interversion de l'ordre des limites d'une intégrale définie.	5
Théorèmes sur les intégrales définies.	6
CHAPITRE II. — DIVERSES MÉTHODES D'INTÉGRATION.	
Intégration immédiate.	7
Intégration par décomposition.	8
Intégration par parties.	9
Intégration par substitution. — Exemples.	10
CHAPITRE III. — INTÉGRATION DES FONCTIONS RATIONNELLES ET IRRATIONNELLES.	
Intégration des fonctions rationnelles.	11
Intégration des fonctions irrationnelles.	12
Applications.	18
CHAPITRE IV. — INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES BINÔMES.	
Cas d'intégrabilité.	19
Formules de réduction des différentielles binômes.	21
Applications.	24
CHAPITRE V. — INTÉGRATION DES FONCTIONS TRANSCENDANTES.	
Intégration des fonctions exponentielles, logarithmiques et circulaires. .	26
Intégration des fonctions de la forme $e^{ax} \cos bxdx$, $e^{ax} \sin bxdx$ et $\sin^m x \cos^n x dx$	28
Cas particuliers.	33
Exemples d'intégrations.	34
CHAPITRE VI.	
Développement de l'intégrale $\int F(x) dx$ en série.	35
TOME II.	b.

	Numéros
Autres formes du développement.	37
Exemples d'intégration par les séries.	39
CHAPITRE VII. — INTÉGRATION DES FONCTIONS DIFFÉRENTIELLES DE PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES.	
Condition d'intégrabilité des fonctions de deux variables et intégration de ces fonctions.	40
Cas de plusieurs variables indépendantes. — Exemples.	43
CHAPITRE VIII. — DÉTERMINATION DES INTÉGRALES DÉFINIES.	
Valeurs de quelques intégrales définies simples.	44
Formule de Wallis.	45
Cas où la fonction sous le signe devient infinie aux limites de l'intégration.	48
Cas où la fonction sous le signe f devient infinie entre les limites de l'intégration.	49
Détermination des intégrales définies à l'aide de la différentiation et de l'intégration sous le signe f . — Applications.	51
Détermination des intégrales définies par l'intégration d'équations différentielles.	58
Formules de Cauchy. — Applications.	60
Autres procédés pour la détermination d'intégrales définies.	63
Détermination de l'intégrale $\int_0^\pi \log(1 - 2a \cos x + a^2) dx$ par	
M. Delaunay.	67
Démonstration de la série de Taylor par la considération des intégrales définies.	68
CHAPITRE IX. — DES INTÉGRALES EULÉRIENNES.	
Définitions et propriétés des intégrales eulériennes de première et de seconde espèce.	69
Expression de l'intégrale de première espèce $B(p, q)$ en fonctions Γ . . .	74
CHAPITRE X. — RÉDUCTION DES INTÉGRALES MULTIPLES.	
Réduction par un changement de coordonnées. — Formule générale pour le changement des variables.	77
Système de coordonnées polaires.	78
Système de coordonnées elliptiques. — Démonstration géométrique de l'intégrale	
$\int_0^b \int_0^c \frac{(\mu^2 - \nu^2) d\mu d\nu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)(c^2 - \mu^2)(c^2 - \nu^2)}} = \frac{\pi}{2}$	
par M. Chasles.	84
Méthode de Lejeune-Dirichlet.	89
Méthode de M. E. Catalan.	92
Autres formules pour la réduction de certaines classes d'intégrales multiples. — Formule de M. Liouville. — Formule de M. O. Schlo-milch. — Démonstration géométrique de la formule de Poisson :	

$$\int_0^\pi \int_0^{2\pi} (a \cos \theta + b \sin \theta \sin \psi + c \sin \theta \cos \psi) \sin \theta d\theta d\psi$$

$$= 2\pi \int_{-1}^{+1} f(x, \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}) dx. \dots\dots\dots 95$$

CHAPITRE XI. — DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS EN SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES.

Formule de Lagrange.	102
Formule de Fourier.	109
Extension de ces formules au cas de plusieurs variables.	110

LIVRE II.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU CALCUL INTÉGRAL.

CHAPITRE PREMIER. — QUADRATURE DES AIRES PLANES.

Formules générales.	111
Exemples de quadratures de courbes rapportées à des coordonnées rectilignes et polaires.	113

CHAPITRE II. — RECTIFICATION DES COURBES.

Formules générales.	123
Rectification de la parabole.	125
Rectification de l'ellipse.	126
Rectification de l'hyperbole.	127
Rectification de la cycloïde.	128
Rectification de la spirale logarithmique.	129

CHAPITRE III. — CUBATURE DES SOLIDES.

Solides de révolution. — Formules générales.	130
Applications.	132
Volume des corps terminés par des surfaces quelconques. — Formules générales.	133
Application à l'ellipsoïde.	135
Volume des corps en coordonnées polaires.	136

CHAPITRE IV. — QUADRATURE DES SURFACES COURBES.

Quadrature des surfaces courbes quelconques.	137
Application à la sphère.	138
Quadrature des surfaces de révolution.	139
Application à l'ellipsoïde de révolution.	140
Aire des surfaces courbes en coordonnées polaires.	141

LIVRE III.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

Numéros

CHAPITRE PREMIER. — ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE QUELCONQUE.

<u>Existence de l'intégrale d'une équation différentielle d'ordre quelconque</u>	142
<u>Intégrales des divers ordres.</u>	143
Conditions que doit remplir une fonction pour être l'intégrale générale d'une équation différentielle d'ordre m .	144

CHAPITRE II. — INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE.

<u>Intégration des équations différentielles du premier ordre par la séparation des variables.</u>	145
<u>Équations de la forme $\varphi(x)dy + f(y)dx = 0$.</u>	146
<u>Équations homogènes.</u>	147
<u>Équations linéaires.</u>	151
<u>Équations qui se ramènent aux équations linéaires du premier ordre.</u>	152
<u>Du facteur propre à rendre intégrable le premier membre de l'équation $Mdx + Ndy = 0$.</u>	155

CHAPITRE III. — RÉOLUTION DE QUELQUES PROBLÈMES GÉOMÉTRIQUES.

<u>Problème des trajectoires.</u>	162
<u>Trajectoires orthogonales.</u>	161
<u>Problème de Beaune.</u>	165

CHAPITRE IV. — ÉQUATIONS DU PREMIER ORDRE ET D'UN DEGRÉ QUELCONQUE.

<u>Définitions.</u>	166
<u>Cas où l'équation ne contient aucune des variables.</u>	167
<u>Cas où la fonction ne renferme que l'une des deux variables.</u>	168
<u>Cas où l'équation peut être résolue par rapport à l'une quelconque des variables.</u>	169

CHAPITRE V. — SOLUTIONS SINGULIÈRES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE.

<u>Solutions singulières déduites de l'intégrale générale.</u>	171
<u>Signification géométrique de l'intégrale singulière.</u>	172
<u>Propriété dont jouissent les solutions singulières de rendre infini le facteur intégrant v.</u>	173
<u>Exemples de solutions singulières.</u>	175

CHAPITRE VI. — INTÉGRATION DE QUELQUES ÉQUATIONS SIMPLES D'UN ORDRE SUPÉRIEUR.

Intégration de l'équation $\frac{d^m y}{dx^m} = F(x)$.	176
Équations où rentrent seulement deux dérivées d'ordre quelconque.	181
Intégration des équations que l'on peut abaisser à un ordre inférieur.	183
Applications.	187

CHAPITRE VII. — INTÉGRATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES D'UN ORDRE QUELCONQUE.

Propriété des équations linéaires sans second membre.	190
Intégration de l'équation linéaire complète.	191
Méthode de Cauchy.	194
Intégration de l'équation linéaire à coefficients constants.	195
Cas des racines imaginaires.	197
Cas des racines égales.	199
Équations linéaires que l'on peut intégrer généralement.	205
Des équations linéaires du second ordre.	206

CHAPITRE VIII. — INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES AU MOYEN DES SÉRIES.

Développement de la série de Maclaurin.	208
Méthode des coefficients indéterminés.	210
Autre méthode d'intégration.	211
Détermination des séries par l'intégration d'équations différentielles.	213

CHAPITRE IX. — INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES A L'AIDE D'INTÉGRALES DÉFINIES.

Exemples d'intégration d'équations différentielles à l'aide d'intégrales définies.	214
--	-----

CHAPITRE X. — INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SIMULTANÉES.

Élimination des variables dans les équations différentielles simultanées.	216
Équations simultanées du premier ordre.	217
Remarques sur les intégrales d'un système d'équations différentielles du premier ordre.	218
Réduction d'un système d'équations simultanées d'ordre quelconque à un système du premier ordre.	219
Intégration des équations linéaires simultanées. — Méthode de d'Alembert.	220
Cas d'un nombre quelconque de variables.	224
Intégration d'un système d'équations pourvues de seconds membres, dans le cas où l'on connaît les intégrales des mêmes équations sans seconds membres.	226
Cas où les coefficients sont constants.	227

CHAPITRE XI. — INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

Des équations aux dérivées partielles qui s'intègrent comme les équations différentielles ordinaires.	228
Intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre et du premier degré.	231
Cas d'un nombre quelconque de variables.	232
Application de la théorie qui précède à l'intégration des équations aux différentielles partielles des diverses classes de surfaces.	233
Surfaces coniques.	235
Surfaces conoïdes.	236
Surfaces de révolution.	237
Intégration des équations aux dérivées partielles des ordres supérieurs.	238
Exemples.	239
Intégration des équations aux dérivées partielles linéaires et à coefficients constants d'un ordre quelconque.	240
Intégration des équations aux dérivées partielles à l'aide des séries. — Applications.	243
Intégration des équations linéaires aux dérivées partielles par le moyen des intégrales définies.	246

LIVRE IV.

CALCUL DES VARIATIONS.

CHAPITRE PREMIER. — VARIATION D'UNE INTÉGRALE DÉFINIE.

Objet du calcul des variations.	252
Des variations.	253
Intervertissement des signes δ et d	254
Intervertissement des signes δ et f	255
Expression de la variation d'une intégrale définie.	256
Cas où la fonction V sous le signe f renferme plusieurs fonctions de x et où cette fonction dépend des limites de l'intégration.	258
Maximum et minimum d'une intégrale définie.	260
Maximum et minimum relatif.	263

CHAPITRE II. — APPLICATION DU CALCUL DES VARIATIONS A QUELQUES PROBLÈMES PARTICULIERS.

Ligne la plus courte entre deux points sur un plan.	264
Ligne la plus courte entre deux points dans l'espace.	266
Ligne minimum tracée sur une surface.	268
Propriété géométrique de la ligne minimum.	269

	Numéros
Aire de révolution minimum.	270
Brachistochrone.	271
Problèmes relatifs aux isopérimètres.	272

LIVRE V.

CALCUL DES DIFFÉRENCES FINIES.

CHAPITRE PREMIER. — CALCUL DIRECT DES DIFFÉRENCES.

Formation des différences successives.	274
Développement des expressions de $\Delta^m u$ et de u_n	275
Différentiation des fonctions.	277

CHAPITRE II. — CALCUL INVERSE DES DIFFÉRENCES.

Définitions et notations.	283
Intégration des fonctions.	285
Développement de l'intégrale $\sum u$ en séries.	290

CHAPITRE III. — DE L'INTERPOLATION.

Formule de Newton.	292
Formule de Lagrange.	293
Approximation des quadratures.	294

FIN DE LA TABLE.

ÉLÉMENTS
DE
CALCUL DIFFÉRENTIEL
ET DE
CALCUL INTÉGRAL.

CALCUL INTÉGRAL.

LIVRE PREMIER

PRINCIPES GÉNÉRAUX DU CALCUL INTÉGRAL.

CHAPITRE PREMIER

DES INTÉGRALES DÉFINIES ET INDÉFINIES.

DÉFINITIONS ET NOTATIONS.

1. Le calcul intégral est l'inverse du calcul différentiel ; il a pour objet de remonter de la fonction dérivée ou de la fonction différentielle à la fonction primitive, c'est-à-dire de trouver la fonction qui étant différentiée a dû produire la différentielle proposée.

Considérons une fonction quelconque de x , $F(x)$; et démontrons d'abord qu'il existe toujours une autre fonction dont la dérivée est égale à $F(x)$, ou la différentielle à $F(x) dx$. Construisons, à cet effet, la courbe dont l'équation en coordonnées rectangulaires est $y = F(x)$; l'aire comprise entre cette courbe, l'axe des x , une ordonnée fixe quelconque et une autre variable y ou $F(x)$, est une fonction de x qui,

d'après le n° (109), tome I, a pour différentielle ydx ou $F(x)dx$. En désignant par $F(x)$ cette fonction, on aura donc

$$df(x) = F(x)dx.$$

La fonction de x , $f(x)$, qui par la différentiation reproduit la différentielle proposée $F(x)dx$, se nomme *l'intégrale* de cette différentielle. On la représente par le signe $\int$ que l'on place au-devant de $F(x)dx$, ainsi on écrit

$$f(x) = \int F(x)dx.$$

Les signes d et $\int$ indiquant deux opérations inverses, ces signes devront se détruire mutuellement lorsqu'ils se trouveront placés au devant de la même fonction variable. Ainsi on a par définition

$$\begin{aligned} d \int F(x)dx &= F(x)dx \\ \int dF(x)dx &= F(x). \end{aligned}$$

2. L'intégrale d'une différentielle donnée $F(x)dx$ a une infinité de valeurs différentes; car si l'on ajoute à $f(x)$ une constante arbitraire, c'est-à-dire une quantité indépendante de la variable x , l'expression $f(x) + C$ qui en résulte aura même différentielle; et ce sera d'ailleurs la seule puisque deux fonctions qui ont la même différentielle ne peuvent différer entre elles que par une constante. Il suit de là que $f(x) + C$ sera l'expression générale de l'intégrale de $F(x)dx$, et que l'on aura

$$f(x) + C = \int F(x)dx.$$

La nécessité de compléter l'expression de l'intégrale de $F(x)dx$ par l'addition d'une constante peut être rendue bien

évidente en considérant l'aire CABD, fig. (1), que cette intégrale $f(x)$ représente. On sait, en effet, que cette aire est comptée à partir d'une ordonnée CA qui est tout à fait arbitraire. Or, si l'on fait varier cette ordonnée, et c'est ce que l'on peut faire à volonté, l'aire CADB changera, et, par suite, $f(x)$ sera susceptible de prendre une infinité de valeurs différentes. On aura donc une expression générale de cette aire, en prenant pour son expression $f(x) + C$.

3. On peut déterminer la constante arbitraire C qui complète l'intégrale $f(x)$, d'après la condition que cette intégrale s'annule pour une certaine valeur a de x . Il suffit, pour cela, de poser $f(a) + C = 0$, d'où $C = -f(a)$, ce qui donne

$$\int F(x) dx = f(x) - f(a);$$

et si l'on attribue ensuite à x la valeur particulière b , le second membre de cette expression prendra la forme $f(b) - f(a)$, et sera alors complètement déterminé. On donne à cette intégrale le nom d'*intégrale définie*, et l'on dit qu'elle est prise entre les limites a et b , ou depuis $x = a$ jusqu'à $x = b$. On la représente par la notation $\int_a^b F(x) dx$; ainsi l'on écrit

$$\int_a^b F(x) dx = f(b) - f(a).$$

4. L'intégrale définie $\int_a^b F(x) dx$ est susceptible d'une représentation géométrique fort simple. Considérons, en effet, la courbe dont l'équation en coordonnées rectangulaires est $y = F(x)$. D'après ce qu'on a vu, $\int_a^b F(x) dx$ représentera l'aire CABD, fig. (1), comprise entre cette courbe, l'axe des x et deux ordonnées quelconques, CA, DB. Or, si l'on détermine la constante C d'après la condition que l'intégrale ou l'aire soit nulle pour une valeur $a = OA$ de x , on fixera ainsi la po-

sition de l'ordonnée CA, à partir de laquelle l'aire est comptée. Cette aire se trouvera alors comprise entre cette limite CA et celle indéfinie MP, correspondante à l'abscisse $OP = x$; et si l'on fixe à son tour cette limite MP en donnant à l'abscisse x la valeur déterminée b , on aura l'aire CABD qui sera comprise entre la courbe, l'axe des x et les deux ordonnées fixes CA, DB, correspondantes aux valeurs déterminées $x = a$ et $x = b$ de l'abscisse. D'après ce qui vient d'être dit, cette aire sera donc représentée par la notation $\int_a^b F(x) dx$.

5. Dans ce qui précède, nous avons supposé que b était plus grand que a . Si c'est le contraire qui a lieu, on aura

$$\int_b^a F(x) dx = f(a) - f(b),$$

et, par suite,

$$\int_b^a F(x) dx = - \int_a^b F(x) dx.$$

Ainsi, on peut intervertir l'ordre des limites d'une intégrale définie, à la condition de changer le signe du résultat.

6. Nous allons actuellement démontrer que l'intégrale définie $\int_a^b F(x) dx$ est la limite vers laquelle tend, pour $dx = 0$, la somme des valeurs infiniment petites de la différentielle $F(x)dx$, lorsque la variable x varie de a à b , par degrés infiniment petits représentés par dx .

En effet, considérons la courbe CD, fig. (2), qui est représentée par l'équation $y = F(x)$, et soient $OA = a$, $OB = b$, $OP = x$, $MP = y$, $PQ = \Delta x$. On aura, d'après ce qui précède,

$$\text{aire ABCD} = \int_a^b F(x) dx.$$

Mais cette aire est égale, comme on le sait, à la limite de

la somme d'une infinité de rectangles tels que celui MPQR dont l'expression est $F(x) \Delta x$. Donc

$$\int_a^b F(x) dx = \lim_{x=a}^{x=b} \sum F(x) \Delta x,$$

et, par conséquent,

$$\int_a^b F(x) dx = \sum_{x=a}^{x=b} F(x) dx.$$

$F(x)$ restant finie et continue quand x varie de a à b .

Il suit de là que si ζ, μ, λ , sont des valeurs de x comprises entre a et b , on aura

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^{\zeta} F(x) dx + \int_{\zeta}^{\mu} F(x) dx + \int_{\mu}^{\lambda} F(x) dx + \int_{\lambda}^b F(x) dx.$$

Cette formule résulte aussi de ce que

$$F(b) - F(a) = F(\zeta) - F(a) + F(\mu) - F(\zeta) + F(\lambda) - F(\mu) + F(b) - F(\lambda).$$

CHAPITRE II.

DIVERSES MÉTHODES D'INTÉGRATION.

INTÉGRATION IMMÉDIATE.

7. Lorsque la fonction différentielle que l'on se propose d'intégrer est reconnue appartenir à l'une des fonctions simples que nous avons différenciées au commencement de ce Cours, l'intégrale de cette fonction s'obtient immédiatement en renversant simplement la notation de la formule qui l'exprime. On doit ensuite, conformément à ce qui a été dit, n° (2), ajouter à cette intégrale une constante arbitraire C. En considérant, par exemple, les différentielles

$$dx^{m+1} = (m+1)x^m dx, \quad de^x = e^x dx,$$

$$d.a^x = a^x l a dx, \quad d.lx = \frac{dx}{x},$$

on trouve

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C \quad \int e^x dx = e^x + C,$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{la} + C \quad \int \frac{dx}{x} = lx + C,$$

On trouve de même pour

$$d.\sin x = \cos x dx, \quad d.\cos x = -\sin x dx,$$

$$d.\operatorname{tang} x = \frac{dx}{\cos^2 x}, \quad d.\cot x = -\frac{dx}{\sin^2 x},$$

$$d. \operatorname{arc} \sin x = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad d \operatorname{arc} \cos x = -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$d \operatorname{arc} \operatorname{tang} x = \frac{dx}{1+x^2}, \quad d \operatorname{arc} \cot x = -\frac{dx}{1+x^2};$$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + C, \quad \int \sin x \, dx = -\cos x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tang} x + C, \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \sin x + C, \quad \int \frac{-dx}{\sqrt{1-x^2}} = \operatorname{arc} \cos x + C,$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arc} \operatorname{tang} x + C, \quad \int \frac{-dx}{1+x^2} = \operatorname{arc} \cot x + C.$$

Dans toutes ces formules, x peut être la variable indépendante ou une fonction quelconque $\psi(x)$ de cette variable. Ainsi, on a également

$$\int [\psi(x)]^m d\psi(x) = \frac{[\psi(x)]^{m+1}}{m+1} + C;$$

$$\int e^{\psi(x)} d\psi(x) = e^{\psi(x)} + C.$$

REMARQUE. La formule

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C$$

qui subsiste, en général, pour toutes les valeurs de m entières, fractionnaires, positives ou négatives, semble devenir infinie lorsqu'on suppose $m = -1$, puisqu'alors on a

$$\int \frac{dx}{x} = \frac{1}{0} + C.$$

Mais cette formule est réellement indéterminée; car si l'on met l'expression $\frac{x^{m+1}}{m+1} + C$ sous la forme

$$\frac{x^{m+1} - a^{m+1}}{m+1},$$

ce qui est permis, a étant une constante, on voit que lorsque $m = -1$, elle se réduit à $\frac{0}{0}$. Le quotient des dérivées des deux termes de cette fonction par rapport à m est $\frac{x^{m+1}lx - a^{m+1}la}{1}$ et donne, en y faisant $m = -1$, $lx - la$: donc $lx - la$ est la vraie valeur de la fonction considérée, et l'on a en conséquence

$$\int \frac{dx}{x} = lx + C.$$

INTÉGRATION PAR DÉCOMPOSITION.

8. Lorsqu'une expression différentielle est donnée sous la forme

$$F(x) dx + \varphi(x) dx - \psi(x) dx,$$

$F(x) dx$, $\varphi(x) dx$..., etc., étant des fonctions de x immédiatement intégrables, ou peut être ramenée à cette forme au moyen de transformations analytiques, l'intégrale générale de cette expression s'obtient en faisant la somme des intégrales des diverses fonctions qui la composent. Ainsi, on a

$$\begin{aligned} & \int [F(x) + \varphi(x) - \psi(x)] dx \\ &= \int F(x) dx + \int \varphi(x) dx - \int \psi(x) dx + C. \end{aligned}$$

Si l'on veut prendre l'intégrale de la différentielle proposée de manière qu'elle s'annule pour la valeur particulière $x = x_0$, alors on aura

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^x [F(x) + \varphi(x) - \psi(x)] dx \\ &= \int_{x_0}^x F(x) dx + \int_{x_0}^x \varphi(x) dx - \int_{x_0}^x \psi(x) dx + C. \end{aligned}$$

Si les fonctions qui composent la proposée étaient multipliées par un facteur constant a , ce facteur multiplierait également les intégrales partielles; ainsi l'on aurait

$$\begin{aligned} & \int [aF(x) + a\varphi(x) - a\psi(x)] dx \\ &= a \int F(x) dx + a \int \varphi(x) dx - a \int \psi(x) dx + C, \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^x [aF(x) + a\varphi(x) - a\psi(x)] dx \\ &= a \int_{x_0}^x F(x) dx + a \int_{x_0}^x \varphi(x) dx - a \int_{x_0}^x \psi(x) dx + C. \end{aligned}$$

Enfin si la proposée est de la forme

$$F(x) + \varphi(x) \sqrt{-1},$$

$F(x)$ et $\varphi(x)$ étant deux fonctions réelles de x , on aura

$$\begin{aligned} & \int [F(x) + \varphi(x) \sqrt{-1}] dx \\ &= \int F(x) dx + \sqrt{-1} \int \varphi(x) dx \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} & \int_{x_0}^x [F(x) + \varphi(x) \sqrt{-1}] dx \\ &= \int_{x_0}^x F(x) dx + \sqrt{-1} \int_{x_0}^x \varphi(x) dx, \end{aligned}$$

en remarquant que $\sqrt{-1}$ peut être assimilée à une constante.

Voici quelques exemples :

$$\begin{aligned} (1) \quad & \int (Ax^m + Bx^n + Cx^p + \dots) dx \\ &= A \frac{x^{m+1}}{m+1} + B \frac{x^{n+1}}{n+1} + C \frac{x^{p+1}}{p+1} + \dots + c. \end{aligned}$$

$$(2) \quad \int (3x + 6x^2 - 5x^3 - 8x^4 - x^5) dx \\ = \frac{3}{2} x^2 + x^3 - \frac{5}{4} x^4 - \frac{8}{5} x^5 - \frac{1}{6} x^6 + C.$$

$$(3) \quad \int \left(3x + \frac{2}{3} \sqrt{x} - \frac{3}{5} \sqrt[3]{x} \right) dx \\ = \int \left(3x + \frac{2}{3} x^{\frac{1}{2}} - \frac{3}{5} x^{\frac{1}{3}} \right) dx \\ = \frac{3}{2} x^2 + \frac{4}{9} x^{\frac{3}{2}} - \frac{9}{20} x^{\frac{4}{3}} + C.$$

INTÉGRATION PAR PARTIES.

9. On donne ce nom à un procédé très-important, dû à Jean Bernoulli, et au moyen duquel on ramène la recherche d'une intégrale compliquée à celle d'une autre intégrale plus simple. Il est fondé sur cette formule de calcul différentiel

$$d(uv) = u dv + v du$$

qui donne par l'intégration des deux membres

$$uv = \int u dv + \int v du;$$

d'où l'on déduit, en faisant passer $\int u dv$ dans le premier,

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Si l'on applique cette formule à l'intégrale $\int x \cos x dx$, et qu'on pose à cet effet

$$dv = \cos x dx, \quad u = x$$

on trouvera :

$$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C.$$

Plus généralement, soit

$$\int x^m \cos x dx.$$

on aura

$$\int x^m \cos x dx = x^m \sin x - m \int x^{m-1} \sin x dx,$$

L'intégrale $\int x^m \cos x dx$ se trouve ainsi ramenée à celle de même forme $\int x^{m-1} \sin x dx$ dans laquelle l'exposant de x est diminué d'une unité. On ramènerait de même cette dernière à celle $\int x^{m-2} \sin x dx$ dont l'exposant est $m-2$; celle-ci à $\int x^{m-3} \sin x dx$; et ainsi de suite. On finira donc par arriver à $\int \sin x dx$ ou $\int \cos x dx$ dont la valeur est connue, et, par une suite de substitutions, on parviendra à l'intégrale demandée.

Soit encore

$$\int x^m e^x dx,$$

on aura

$$\int x^m e^x dx = \int x^m de^x = x^m e^x - m \int x^{m-1} e^x dx;$$

et l'intégrale $\int x^m e^x dx$ se trouvera ainsi ramenée à celle $\int x^{m-1} e^x dx$ dans laquelle l'exposant est diminué d'une unité.

On ramènerait de même cette dernière à celle $\int x^{m-2} e^x dx$; celle-ci à $\int x^{m-3} e^x dx$; et ainsi de suite.

INTÉGRATION PAR SUBSTITUTION.

10. La substitution d'une autre variable à la variable x , dans la fonction proposée, réduit souvent cette fonction à une forme immédiatement intégrable.

Soit $F(x) dx$ une fonction qui n'est pas immédiatement intégrable. En posant

$$x = \psi(t); \text{ d'où } dx = \psi'(t) dt,$$

on aura

$$F(x) dx = F[\psi(t)] \psi'(t) dt = f(t) dt,$$

et, par suite,

$$\int F(x) dx = \int f(t) dt.$$

Si l'on veut prendre l'intégrale de la différentielle $F(x) dx$ de manière que cette intégrale s'annule pour la valeur $x = x_0$, il faudra que l'intégrale de $f(t) dx$ soit prise de manière qu'elle s'annule pour la même valeur de x . Si donc t_0 désigne la valeur qu'il faut attribuer à t pour que x se réduise à x_0 , on aura

$$\int_{x_0}^x F(x) dx = \int_{t_0}^t f(t) dt.$$

EXEMPLES. — Si dans l'intégrale

$$(1) \quad \int (ax + b)^m dx,$$

on pose

$$ax + b = t; \text{ d'où } dx = \frac{dt}{a},$$

on aura

$$\int (ax+b)^m dx = \frac{1}{a} \int t^m dt = \frac{1}{a} \frac{t^{m+1}}{m+1} + C,$$

et, par conséquent, en remettant pour t sa valeur $ax+b$,

$$\int (ax+b)^m dx = \frac{1}{a} \frac{(ax+b)^{m+1}}{m+1} + C.$$

De même pour

$$(2) \quad \int \frac{dx}{a^2+x^2},$$

on aura, en posant

$$x=ay, \text{ d'où } dx=ady,$$

$$\int \frac{dx}{a^2+x^2} = \frac{1}{a} \int \frac{dy}{1+y^2} = \frac{1}{a} \text{arc tang } y + C = \frac{1}{a} \text{arc tang } \frac{x}{a} + C.$$

Pour

$$(3) \quad \int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}},$$

on trouve, en posant

$$x^2+a^2=y^2, \text{ d'où } xdx=ydy,$$

$$\int \frac{xdx}{\sqrt{x^2+a^2}} = \int dy = y + C = \sqrt{x^2+a^2} + C.$$

Soit encore

$$\int \frac{dx}{x^2+px+q},$$

p et q étant des quantités telles que l'on ait $p^2-4q < 0$.

Posons

$$x = -\frac{p}{2} + \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} t; \text{ d'où } dx = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}} dt,$$

on aura

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \int \frac{dt}{t^2 + 1},$$

Or

$$\int \frac{dt}{t^2 + 1} = \text{arc tang } t + C.$$

Donc

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{1}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} \text{arc tang } \frac{x + \frac{p}{2}}{\sqrt{q - \frac{p^2}{4}}} + C.$$

Si $\alpha + \epsilon \sqrt{-1}$ et $\alpha - \epsilon \sqrt{-1}$ sont les racines imaginaires de l'équation $x^2 + px + q = 0$, on a

$$\alpha = -\frac{p}{2}, \quad \epsilon = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}},$$

et l'intégrale précédente prend la forme

$$\int \frac{dx}{x^2 + px + q} = \frac{1}{\epsilon} \text{arc tang } \frac{x - \alpha}{\epsilon} + C.$$

CHAPITRE III.

INTÉGRATION DES FONCTIONS RATIONNELLES ET IRRATIONNELLES.

INTÉGRATION DES FRACTIONS RATIONNELLES.

11. La décomposition des fractions rationnelles en fractions simples ramène d'après ce qui est dit (note I, t. I) l'intégration de ces fonctions à celle des différentielles de la forme

$$\frac{Adx}{x-a}, \quad \frac{Adx}{(x-a)^m}, \quad \frac{(Mx+N)dx}{(x+a)^2+b^2}, \quad \frac{(Mx+N).dx}{[(x-a)^2+b^2]^m},$$

que nous allons examiner successivement.

1° La première

$$\frac{Adx}{x-a},$$

donne, en se rappelant ce qui a été dit au n° (7),

$$\int \frac{Adx}{x-a} = A \log(x-a) + C,$$

C désignant toujours une constante arbitraire.

2° On a de même, pour la seconde,

$$\frac{Adx}{(x-a)^m},$$

$$\int \frac{Adx}{(x-a)^m} = -\frac{A}{(m-1)(x-a)^{m-1}} + C;$$

3° La troisième

$$\frac{(Mx + N)dx}{(x - \alpha)^2 + \beta^2},$$

peut se mettre sous la forme

$$\frac{M}{2} \frac{2(x - \alpha)dx}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} + (M\alpha + N) \frac{dx}{(x - \alpha)^2 + \beta^2};$$

et comme

$$\int \frac{2(x - \alpha)dx}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} = I[(x - \alpha)^2 + \beta^2],$$

$$\int \frac{dx}{(x - \alpha)^2 + \beta^2} = \frac{1}{\beta} \arctan \frac{x - \alpha}{\beta},$$

il en résulte

$$\int \frac{(Mx + N)dx}{(x - \alpha)^2 + \beta^2}$$

$$= \frac{M}{2} I[(x - \alpha)^2 + \beta^2] + \frac{M\alpha + N}{\beta} \arctan \frac{x - \alpha}{\beta} + C;$$

4° Enfin la dernière expression

$$\frac{(Mx + N)dx}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^m}$$

se décompose en la suivante :

$$\frac{M(x - \alpha)dx}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^m} + \frac{(M\alpha + N)dx}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^m}.$$

L'intégrale de la première fraction est

$$\int \frac{M(x - \alpha)dx}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^m} = - \frac{A}{2(m - 1) [(x - \alpha)^2 + \beta^2]^{m-1}};$$

et quant à celle de $\frac{(Mx + N)dx}{[(x - \alpha)^2 + \beta^2]^m}$, on l'obtient de la manière suivante :

Posons $x - z = \epsilon z$, d'où $dx = \epsilon dz$; cette fraction deviendra

$$\frac{Mx + N}{\epsilon^{2m-1}} \cdot \frac{dz}{(1+z^2)^m};$$

en sorte qu'il s'agira d'intégrer $\frac{dz}{(1+z^2)^m}$. Or, on a identiquement,

$$\frac{1}{(1+z^2)^m} = \frac{1+z^2-z^2}{(1+z^2)^m} = \frac{1}{(1+z^2)^{m-1}} - \frac{z^2}{(1+z^2)^m};$$

Par conséquent

$$\int \frac{dz}{(1+z^2)^m} = \int \frac{dz}{(1+z^2)^{m-1}} - \int \frac{z^2 dz}{(1+z^2)^m}.$$

Si maintenant on décompose l'intégrale $\int \frac{z^2 dz}{(1+z^2)^m}$ en deux facteurs $\frac{z}{2}$ et $\frac{2z dz}{(1+z^2)^m}$, et que l'on intègre par parties, on trouvera

$$\int \frac{z^2 dz}{(1+z^2)^m} = -\frac{z}{(2m-2)(1+z^2)^{m-1}} + \frac{1}{2(m-2)} \int \frac{dz}{(1+z^2)^{m-1}},$$

et en substituant dans la précédente, puis réduisant, il viendra

$$\int \frac{dz}{(1+z^2)^m} = \frac{z}{(2m-2)(1+z^2)^{m-1}} + \frac{2m-3}{2m-2} \int \frac{dz}{(1+z^2)^{m-1}}.$$

L'intégrale $\int \frac{dz}{(1+z^2)^m}$ se trouve ainsi ramenée à celle $\int \frac{dz}{(1+z^2)^{m-1}}$ dans laquelle l'exposant du dénominateur est diminué d'une unité. On ramènerait de même cette dernière à celle $\int \frac{dz}{(1+z^2)^{m-2}}$ dans laquelle l'exposant est $m-2$; et

ainsi de suite. On finira donc par arriver à $\int \frac{dz}{(1+z^2)}$, dont la valeur est $\text{arc tang } z$, et, par une suite de substitutions, on parviendra à l'expression de $\int \frac{dz}{(1+z^2)^m}$. Cette expression est :

$$\int \frac{dz}{(1+z^2)^m} = \frac{z}{(2m-2)(1+z^2)^{m-1}} \left[1 + \frac{2m-3}{2m-4}(1+z^2) + \frac{(2m-3)(2m-5)}{(2m-4)(2m-6)}(1+z^2)^2 + \dots \right. \\ \left. + \frac{(2m-5)(2m-6)(2m-7)\dots 5.3}{(2m-4)(2m-6)(2m-8)\dots 4.2}(1+z^2)^{m-2} \right. \\ \left. + \frac{(2m-3)(2m-5)\dots 3.1}{(2m-2)(2m-4)\dots 4.2} \text{arc tang } z + C; \right.$$

et en la multipliant par $\frac{Mx+N}{6^{2m-1}}$, puis remplaçant z par sa valeur $\frac{x-\alpha}{6}$, on obtiendra l'intégrale de

$$\frac{(Mx+N)dx}{[(x-\alpha)^2+6^2]^m}$$

On connaîtra par suite celle de la différentielle proposée

$$\frac{(Mx+N)dx}{[(x-\alpha)^2+6^2]^m},$$

puisque cette différentielle se forme de la somme des deux expressions dont nous venons d'obtenir les intégrales.

INTÉGRATION DES FONCTIONS IRRATIONNELLES.

12. Une fonction qui ne contient que des monomes irrationnels est toujours intégrable; car on peut toujours faire disparaître les radicaux qui affectent des quantités monomes, et

ramener, par conséquent, la fonction à une forme rationnelle que l'on sait intégrer.

Soit, en effet,

$$\frac{(1 + \sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2})dx}{1 + \sqrt[3]{x}};$$

on peut écrire :

$$\frac{(1 + x^{\frac{1}{3}} - x^{\frac{2}{3}})dx}{1 + x^{\frac{1}{3}}},$$

et, si l'on fait $x = z^3$; d'où $dx = 3z^2 dz$, il viendra :

$$\frac{6z^3 dz(1 + z^3 - z^4)}{1 + z^3},$$

ou, en divisant par $1 + z^3$,

$$-6dz \left(z^7 - z^6 - z^6 - z^4 - z^3 + 1 - \frac{1}{1 + z^3} \right),$$

expression qui est rationnelle.

L'intégrale de cette expression sera donc

$$-6 \left(\frac{z^8}{8} - \frac{z^7}{7} - \frac{z^6}{6} - \frac{z^5}{5} - \frac{z^3}{3} + z - \text{arc tang } z \right) + C;$$

et, en remettant pour z sa valeur $\sqrt[3]{x}$, on aura

$$\begin{aligned} & \int \frac{(1 + \sqrt{x} - \sqrt[3]{x^2})dx}{1 + \sqrt[3]{x}} \\ &= -\frac{6}{8} x \sqrt[3]{x^3} + \frac{6}{7} x \sqrt[3]{x} + x - \frac{6}{5} \sqrt[3]{x^5} + 2 \sqrt[3]{x^3} - 6 \sqrt[3]{x} \\ & \quad + 6 \text{ arc tang } \sqrt[3]{x} + C. \end{aligned}$$

13. Il n'en est pas de même lorsque la fonction renferme un radical qui affecte un polynôme. Cependant on peut toujours, lorsque ce radical est de la forme $\sqrt[3]{a + bx \pm x^2}$,

rendre rationnelle la fonction qui le renferme, et, par conséquent, en effectuer l'intégration sous forme finie.

En effet, soit

$$F(x\sqrt{a+bx\pm x^2})dx$$

la fonction dont il s'agit. Considérons d'abord le cas où le terme x^2 sous le radical est précédé du signe +; et posons

$$\sqrt{a+bx+x^2} = z - x,$$

z désignant une nouvelle variable.

En élevant au carré les deux membres de cette égalité, on aura

$$a+bx = z^2 - 2zx + x^2;$$

d'où

$$(1) \quad x = \frac{z^2 - a}{b + 2z},$$

$$(2) \quad dx = \frac{2(a + bz + z^2)dz}{(b + 2z)^2},$$

$$(3) \quad \sqrt{a+bx+x^2} = \frac{a + bz + z^2}{b + 2z};$$

et ces valeurs substituées dans la fonction donnée la changeront en une fonction de z qui sera rationnelle, et, par conséquent, intégrable.

14. On peut encore poser, a étant positif,

$$\sqrt{a+bx+x^2} = \sqrt{a} + xz,$$

et l'on a alors, en élevant au carré et divisant par x ,

$$b+x = 2z\sqrt{a} + xz^2;$$

d'où

$$(1) \quad x = \frac{2z\sqrt{a} - b}{1 - z^2},$$

$$(2) \quad dx = \frac{2z^2 \sqrt{a} - bz + \sqrt{a}}{(1-z^2)^3} dz,$$

$$(3) \quad \sqrt{a + bx + x^2} = \frac{z^2 \sqrt{a} - bz + \sqrt{a}}{1 - z^2}.$$

Mais si a était négatif, il s'introduirait des imaginaires; ce que l'on doit éviter.

15. Voici encore une troisième transformation que l'on peut employer quand les deux racines du trinôme $a + bx + x^2$ sont réelles.

Soient α et β les deux racines de l'équation $a + bx + x^2 = 0$; on aura, d'après les propriétés des équations,

$$a + bx + x^2 = (x - \alpha)(x - \beta);$$

Posons

$$\sqrt{a + bx + x^2} = (x - \alpha)z,$$

il en résultera

$$(x - \alpha)(x - \beta) = (x - \alpha)^2 z^2,$$

ou

$$(x - \beta) = (x - \alpha)z^2.$$

Ainsi, l'on aura pour la transformation dont il s'agit,

$$(1) \quad x = \frac{\beta - \alpha z^2}{1 - z^2},$$

$$(2) \quad \sqrt{a + bx + x^2} = \frac{(\beta - \alpha)z}{1 - z^2},$$

$$(3) \quad dx = \frac{2z(\beta - \alpha)}{(1 - z^2)^3} dz.$$

16. Soit maintenant

$$F(x \sqrt{a + bx - x^2}) dx.$$

Si a est positif, on peut employer la seconde transformation qui précède. Ainsi, posant

$$\sqrt{a + bx - x^2} = \sqrt{a} + xz,$$

d'où

$$b - x = 2z\sqrt{a} + xz,$$

on en déduira

$$(1) \quad x = \frac{b - 2z\sqrt{a}}{1 + z^2},$$

$$(2) \quad \sqrt{a + bx + x^2} = \frac{\sqrt{a} + bz - z^2\sqrt{a}}{1 + z^2},$$

$$(3) \quad dx = \frac{2(z^2\sqrt{a} - bz - \sqrt{a})}{(1 + z^2)^2} dz,$$

Mais si a est négatif, alors les racines du trinôme $a + bx - x^2$ seront réelles, et l'on devra employer la troisième transformation qui précède. On écrira, en conséquence,

$$a + bx - x^2 = (x - \alpha)(6 - x);$$

et posant

$$\sqrt{a + bx - x^2} = (x - \alpha)z,$$

d'où

$$b - x = (x - \alpha)z^2,$$

on en tirera

$$(1) \quad x = \frac{6 + \alpha z^2}{1 + z^2},$$

$$(2) \quad \sqrt{a + bx - x^2} = \frac{(6 - \alpha)z}{1 + z^2},$$

$$dx = \frac{2 \cdot (\alpha - 6)z}{(1 + z^2)^2} dz.$$

17. L'irrationalité d'une fonction différentielle peut encore disparaître lorsque cette fonction est de la forme

$$F(x\sqrt{x+a}, \sqrt{x+b})dx.$$

En effet, si l'on pose

$$\sqrt{x+a} = z,$$

on aura

$$x = z^2 - a, \quad dx = 2zdz, \quad \sqrt{x+b} = \sqrt{z^2 - a + b};$$

et si l'on substitue ces valeurs dans la fonction proposée, on la changera en une certaine fonction de z , $\psi(z, \sqrt{z^2 - a + b}) dz$; ce qui ramènera ce cas à celui du n° (16).

18. Voici maintenant quelques applications des transformations qui précèdent.

Soit d'abord :

$$\frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}};$$

Posant

$$\sqrt{a+bx+x^2} = z - x,$$

on en déduit

$$a + bx = -2xz + z^2,$$

$$dx = \frac{2(z-x)dx}{b+2z},$$

$$\frac{dx}{z-x} = \frac{2dz}{b+2z}.$$

On a donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}} = \int \frac{dz}{\frac{b}{2} + z} = l \left(\frac{b}{2} + z \right) + C,$$

et, par conséquent, en remettant pour z sa valeur $x + \sqrt{a+bx+x^2}$,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}} = l \left(\frac{b}{2} + x + \sqrt{a+bx+x^2} \right) + C.$$

Dans le cas particulier où $b = 0$, on a

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+x^2}} = l(x + \sqrt{a+x^2}) + C.$$

Si la fonction donnée était de la forme

$$\frac{(ax + b)dx}{\sqrt{a + bx + x^2}},$$

on décomposerait cette fonction de la manière suivante :

$$\frac{(ax + b)dx}{\sqrt{a + bx + x^2}} = \frac{a\left(\frac{b}{2} + x\right)dx}{\sqrt{a + bx + x^2}} + \frac{\left(b - \frac{ab}{2}\right)dx}{\sqrt{a + bx + x^2}},$$

et l'on aurait

$$\int \frac{(ax + b)dx}{\sqrt{a + bx + x^2}} = \int \frac{a\left(\frac{b}{2} + x\right)dx}{\sqrt{a + bx + x^2}} = \left(b - \frac{ab}{2}\right) \int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + x^2}}.$$

Mais

$$\int \frac{a\left(\frac{b}{2} + x\right)dx}{\sqrt{a + bx + x^2}} = a\sqrt{a + bx + x^2},$$

et

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx + x^2}} = l\left(\frac{b}{2} + x + \sqrt{a + bx + x^2}\right) + C.$$

Donc

$$\int \frac{(ax + b)dx}{\sqrt{a + bx + x^2}} = a\sqrt{a + bx + x^2} + \left(b - \frac{ab}{2}\right) l\left(\frac{b}{2} + x + \sqrt{a + bx + x^2}\right) + C.$$

Considérons maintenant la fonction

$$\frac{dx}{\sqrt{a + bx - x^2}}.$$

En posant

$$\sqrt{a + bx - x^2} = \sqrt{a + x^2},$$

on en déduit

$$b - x = 2z\sqrt{a + xz}$$

$$\frac{dx}{\sqrt{a + xz}} = -\frac{2dz}{1 + z^2},$$

On a donc

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{a + xz}} = -2 \int \frac{dz}{1 + z^2}$$

$$= -2 \operatorname{arc} \operatorname{tang} z + C,$$

et, par conséquent,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a + bx - x^2}} = -2 \operatorname{arc} \operatorname{tang} \frac{\sqrt{a + bx - x^2} - \sqrt{a}}{x} + C.$$

REMARQUE. — L'intégrale de la différentielle

$$\frac{dx}{\sqrt{a + bx - x^2}}$$

pourrait être obtenue plus simplement, en ramenant cette différentielle à la forme $\frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}}$, expression dont l'intégrale est $\operatorname{arc} \sin z$. En effet, on a

$$\frac{dx}{\sqrt{a + bx - x^2}}$$

$$= \frac{dx}{\sqrt{\frac{b^2}{4} + a - \left(x - \frac{b}{2}\right)^2}} = \frac{\frac{dx}{\sqrt{\frac{b^2}{4} + a}}}{\sqrt{1 - \left(\frac{x - \frac{b}{2}}{\sqrt{\frac{b^2}{4} + a}}\right)^2}}$$

et, par suite,

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a+bx-x^2}} = \arcsin \frac{x - \frac{b}{2}}{\sqrt{\frac{b^2}{4} + a}} + C.$$

On ramènerait de même $\frac{dx}{\sqrt{a+bx+x^2}}$ à la forme $\frac{dz}{\sqrt{1+z^2}}$, expression dont l'intégrale a été donnée n° (7); mais il n'y aurait, dans ce cas, aucun avantage à le faire.

CHAPITRE IV.

INTÉGRATION DES DIFFÉRENTIELLES BINOMES.

CAS D'INTÉGRABILITÉ.

19. On désigne généralement sous le nom de *différentielles binômes* des expressions de la forme :

$$x^m(a+bx^n)^p dx.$$

On peut d'abord, sans restreindre la généralité de cette formule, supposer que m et n sont des nombres entiers ; car si l'on avait, par exemple, $x^{\frac{1}{2}}(a+bx^{\frac{1}{2}})^p dx$, en faisant $x=z^2$; d'où $dx=2z dz$, il en résulterait $6z^7 dz (a+bz^3)^p$, expression binôme dans laquelle les exposants de la variable sont des nombres entiers. On peut encore considérer n comme essentiellement positif ; car si l'on avait $x^m(a+bx^{-n})^p dx$, on ferait $x=\frac{1}{z}$, et l'expression proposée serait ramenée à celle $-z^{-m-2}(a+bx^n)^p dz$, dans laquelle l'exposant entre la parenthèse est positif. Quant à l'exposant p hors la parenthèse, on peut toujours le supposer fractionnaire, car s'il était entier, positif ou négatif, la différentielle proposée serait rationnelle et s'intégrerait par les méthodes qui précèdent.

Supposons donc que m et n soient des nombres entiers ; p un nombre fractionnaire, et cherchons les cas où la différentielle binôme $x^m(a+bx^n)^p dx$ peut être intégrée.

Posons

$$a+bx^n=z;$$

d'où

$$x = \left(\frac{z-a}{b} \right)^{\frac{1}{n}}, \quad dx = \frac{1}{nb} \left(\frac{z-a}{b} \right)^{\frac{1}{n}-1} dz.$$

La fonction proposée deviendra

$$\frac{1}{nb} z^p \left(\frac{z-a}{b} \right)^{\frac{m+1}{n}-1} dz,$$

et, sous cette forme, on voit que la fonction sera rationnelle toutes les fois que $\frac{m+1}{n}$ sera un nombre entier.

20. On trouve un autre cas d'intégrabilité, en mettant la différentielle proposée sous la forme

$$x^{m+np} (ax^n + b)^p dx;$$

car si l'on applique ici la condition qui vient d'être trouvée, on reconnaît que cette expression est intégrable toutes les fois que $\frac{m+np+1}{-n}$ ou $\frac{m+1}{n} + p$ est un nombre entier.

Cette condition pourra quelquefois être remplie quand la première ne le sera pas.

Si l'on prend, par exemple, la fonction

$$x^4(a+bx^3)^{\frac{1}{3}}dx,$$

on trouve

$$\frac{m+1}{n} = \frac{4+1}{3} = \frac{5}{3}$$

$$\frac{m+1}{n} + p = \frac{4+1}{3} + \frac{1}{3} = 2;$$

et l'on voit que, dans ce cas, la seconde condition seule se trouve remplie.

FORMULES DE RÉDUCTION DES DIFFÉRENTIELLES BINÔMES.

21. Lorsque les conditions d'intégrabilité que nous venons d'indiquer ne peuvent être remplies, on cherche à ramener l'intégrale de $x^m(a+bx^n)^p dx$ à une autre plus simple; et pour cela, on emploie l'intégration par parties dont le principe a été exposé n° (9).

En écrivant la fonction proposée de la manière suivante :

$$x^m(a+bx^n)^p dx = x^{m-n+1}(a+bx^n)^p x^{n-1} dx,$$

et comparant le second membre de cette égalité à celle

$$\int u dv = uv - \int v du,$$

on en déduit

$$u = x^{m-n+1}, \quad dv = (a+bx^n)^{p-1} dx,$$

$$v = \frac{(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)};$$

par suite, on a

$$\begin{aligned} \int x^m(a+bx^n)^p dx &= \int x^{m-n+1}(a+bx^n)^p x^{n-1} dx \\ &= \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)} - \frac{m-n+1}{nb(p+1)} \int x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1} dx. \end{aligned}$$

Mais

$$\begin{aligned} x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1} &= x^{m-n}(a+bx^n)^p(a+bx^n) \\ &= ax^{m-n}(a+bx^n)^p + bx^m(a+bx^n)^p, \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} &x^{m-n}(a+bx^n)^{p+1} dx \\ &= a \int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx + b \int x^m(a+bx^n)^p dx; \end{aligned}$$

substituant, il vient

$$\begin{aligned} & \int x^m (a + bx^n)^p dx \\ &= \frac{x^{m-n+1} (a + bx^n)^{p+1}}{nb(p+1)} - \frac{m-n+1}{nb(p+1)} a \int x^{m-n} (a + bx^n)^p dx \\ & \quad - \frac{m-n+1}{nb(p+1)} b \int x^m (a + bx^n)^p dx; \end{aligned}$$

d'où l'on tire, en transposant le dernier terme et réduisant,

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} \int x^m (a + bx^n)^p dx &= \frac{x^{m-n+1} (a + bx^n)^{p+1}}{b(np + m + 1)} \\ &- \frac{a(m-n+1)}{b(np + m + 1)} \int x^{m-n} (a + bx^n)^p dx. \end{aligned} \right.$$

L'intégrale $\int x^m (a + bx^n)^p dx$ se trouve ainsi ramenée à celle de même forme $\int x^{m-n} (a + bx^n)^p dx$, dans laquelle l'exposant m est diminué de n ; on ramènerait de même cette dernière à celle $\int x^{m-2n} (a + bx^n)^p dx$ dans laquelle l'exposant de x , hors la parenthèse, est $m - 2n$; celle-ci à $\int x^{m-3n} (a + bx^n)^p dx$; et ainsi de suite. Après un nombre k d'intégrations, on sera donc conduit à l'intégrale

$$\int x^{m-kn} (a + bx^n)^p dx,$$

et l'on pourra intégrer, si l'on a

$$m - kn = m - 1 \quad \text{ou} \quad \frac{m+1}{n} = k+1$$

condition qui ramène au premier cas d'intégrabilité.

Lorsque $np + m + 1 = 0$, la formule (1) devient illusoire. Mais alors la seconde condition d'intégrabilité se trouve satisfaite

et l'intégrale peut s'obtenir par la substitution que nous avons indiquée au n° (19).

22. Dans le calcul qui précède, la réduction porte sur l'exposant de x . Or, on peut faire porter cette réduction sur l'exposant p du binôme $a + bx^n$.

En effet, on a

$$x^m(a + bx^n)^p dx = (a + bx^n)^p d \frac{x^{m+1}}{m+1},$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} \int x^m(a + bx^n)^p dx &= \frac{x^{m+1}(a + bx^n)^p}{m+1} \\ &- \frac{pnb}{m+1} \int x^{m+n}(a + bx^n)^{p-1} dx. \end{aligned}$$

Cette formule diminue bien l'exposant p d'une unité, mais augmente celui m de n . Or, si dans la formule (1), on change m en $m + n$ et p en $p - 1$, on aura

$$\begin{aligned} \int x^{m+n}(a + bx^n)^{p-1} dx &= \frac{x^{m+1}(a + bx^n)^p}{b(np + m + 1)} \\ &- \frac{(m+1)a}{b(np + m + 1)} \int x^m(a + bx^n)^{p-1} dx. \end{aligned}$$

Par suite, il viendra, en substituant dans la précédente,

$$\begin{aligned} \int x^m(a + bx^n)^p dx &= \frac{x^{m+1}(a + bx^n)^p}{m+1} \\ &- \frac{np x^{m+1}(a + bx^n)^p}{(m+1)(np + m + 1)} + \frac{anp}{np + m + 1} \int x^m(a + bx^n)^{p-1} dx, \end{aligned}$$

et en réduisant

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} \int x^m(a + bx^n)^p dx &= \frac{x^{m+1}(a + bx^n)^p}{np + m + 1} \\ &+ \frac{anp}{np + m + 1} \int x^m(a + bx^n)^{p-1} dx. \end{aligned} \right.$$

formule qui est celle demandée.

Cette formule devient illusoire, comme la précédente, lorsque

$$np + m + 1 = 0.$$

Mais alors la seconde condition d'intégrabilité se trouve satisfaite, et l'intégrale cherchée s'obtient par la transformation indiquée.

23. Les formules (1) et (2) cesseraient d'être applicables si les exposants m et p étaient négatifs; car alors ces exposants augmenteraient au lieu de diminuer. Cependant on peut toujours leur faire subir une transformation qui les rendent propres aux cas dont il s'agit.

En effet, de la formule (1), on en tire

$$\int x^{m-n}(a+bx^n)^p dx = \frac{x^{m-n+1}(a+bx^n)^p}{(m-n+1)a} - \frac{b(m+np+1)}{(m-n+1)a} \int x^m(a+bx^n)^p dx,$$

et changeant $m-n$ en $-m$, ou m en $m+n$, on a

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int x^{-m}(a+bx^n)^p dx = -\frac{x^{-m+1}(a+bx^n)^{p+1} dx}{(m+1)a} \\ -\frac{b(m-np-n-1)}{(m-1)a} \int x^{-m+n}(a+bx^n)^p dx. \end{array} \right.$$

Cette formule ramène, comme on le voit, l'intégrale $\int x^{-m}(a+bx^n)^p dx$ à celle de même forme $\int x^{-m+n}(a+bx^n)^p dx$; cette dernière à celle $\int x^{-m+2n}(a+bx^n)^p dx$; et ainsi de suite. Après un nombre k d'intégrations, on sera donc ramené à l'intégrale

$$\int x^{-m+kn}(a+bx^n)^p dx,$$

et l'on pourra obtenir cette intégrale si l'on a

$$-m + kn = n - 1 \quad \text{ou} \quad \frac{-m+1}{n} = 1 - k,$$

condition qui ramène encore au premier cas d'intégrabilité.

Si p était négatif, la formule (2) donnerait

$$\int x^m (a + bx^n)^{p-1} dx = - \frac{x^{m+1} (a + bx^n)^p}{anp} \\ + \frac{np + m + 1}{anp} \int x^m (a + bx^n)^p dx,$$

et changeant p en $-p + 1$, on aurait

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int x^m (a + bx^n)^{-p} dx = \frac{x^{m+1} (a + bx^n)^{-p+1}}{an(p-1)} \\ - \frac{m + n + 1 - pn}{an(p-1)} \int x^m (a + bx^n)^{-p+1} dx, \end{array} \right.$$

formule qui réduit successivement d'une unité l'exposant du binôme et le ramène ainsi à être compris entre 0 et 1.

Les formules (3) et (4) deviendraient illusoires, si dans la première on avait $m = 1$ et dans la seconde $p = 1$; mais dans l'un et dans l'autre de ces cas la différentielle proposée pourrait être rendue rationnelle et s'intégrerait par ce qui a été dit précédemment.

24. Pour donner une application des formules qui précèdent, proposons-nous d'intégrer la différentielle

$$\frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

dans laquelle m désigne un nombre entier positif.

On a

$$n = 2, \quad p = -\frac{1}{2};$$

ainsi cette formule est toujours intégrable.

Or, si on applique la formule (1), on trouve

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} = - \frac{x^{m-1} \sqrt{1-x^2}}{m} + \frac{m-1}{m} \int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

et faisant successivement $m = 1, 3, 5$, etc., il vient

$$\begin{aligned}\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} &= -\sqrt{1-x^2}, \\ \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} &= -\frac{x^2}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\ \int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}} &= -\frac{x^4}{4} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\ \int \frac{x^7 dx}{\sqrt{1-x^2}} &= -\frac{x^6}{6} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}}; \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

d'où l'on tire

$$\begin{aligned}\int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} &= -\sqrt{1-x^2}, \\ \int \frac{x^3 dx}{\sqrt{1-x^2}} &= -\left(\frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\right) \sqrt{1-x^2}, \\ \int \frac{x^5 dx}{\sqrt{1-x^2}} &= -\left(\frac{x^4}{4} + \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{1}{2}\right) \sqrt{1-x^2}, \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

On a donc, en général, si m est un nombre impair,

$$\begin{aligned}&\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= -\left[\frac{x^{m-1}}{m-1} + \frac{(m-1)x^{m-3}}{(m-3)} + \dots + \frac{2.4.6\dots(m-1)}{1.3.5\dots m}\right] \sqrt{1-x^2} + C.\end{aligned}$$

Si m est un nombre pair, on a, en faisant successivement $m = 2, 4, 6$, etc.

$$\begin{aligned}\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} &= -\frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\ \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}} &= -\frac{x^3}{4} \sqrt{1-x^2} + \frac{3}{4} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}}, \\ \int \frac{x^6 dx}{\sqrt{1-x^2}} &= -\frac{x^5}{6} \sqrt{1-x^2} + \frac{5}{6} \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}}; \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

et comme de là on tire

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \arcsin x, \\ \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{1-x^2}} &= -\frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \arcsin x, \\ \int \frac{x^4 dx}{\sqrt{1-x^2}} &= -\left(\frac{x^3}{4} + \frac{5}{2} \frac{x}{4}\right) \sqrt{1-x^2} + \frac{1}{2} \frac{5}{4} \arcsin x, \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

l'en résulte

$$\begin{aligned}&\int \frac{x^m dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= -\left[\frac{x^{m-1}}{m} + \frac{(m-1)x^{m-3}}{(m-2)m} + \dots + \frac{1.3.5\dots(m-1)}{2.4.6\dots m} x \right] \sqrt{1-x^2} \\ &\quad + \frac{1.3.5\dots(m-1)}{2.4.6\dots m} \arcsin x + C.\end{aligned}$$

Passons, maintenant au cas où l'exposant est négatif. En le représentant par $-m$, on a

$$(a) \int \frac{x^{-m} dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{x^{-m+1} \sqrt{1-x^2}}{m-1} + \frac{m-2}{m-1} \int \frac{x^{-m+1} dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Cette formule ne peut pas être employée lorsque $m=1$; car alors le coefficient $\frac{m-2}{m-1}$ deviendrait $-\frac{1}{0} = -\infty$. La plus petite valeur que l'on puisse donner, dans ce cas, à m est 5. Alors, la formule (a) devient

$$\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{1-x^2}} = -\frac{\sqrt{1-x^2}}{2x^2} + \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}},$$

et il s'agit d'intégrer $\frac{dx}{x \sqrt{1-x^2}}$. Or, en posant, d'après ce qui a été dit au n° (13),

$$\sqrt{1-x^2} = 1+xz,$$

on en déduit

$$-x = 2z + xz^2$$

$$-dx = 2dz + 2xzdz + z^2dx,$$

et

$$\frac{dx}{1+xz} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\frac{2dz}{1+z^2}, \quad \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = \frac{dz}{z}.$$

On a donc

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = lz + C,$$

et, par conséquent,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = l\left(\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}\right) + C.$$

On arrive encore au même résultat, en posant $x = \frac{1}{z}$, ce qui donne

$$dx = -\frac{dz}{z^2}, \quad \sqrt{1-x^2} = \frac{\sqrt{z^2-1}}{z},$$

et, par conséquent,

$$\frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}.$$

On a d'ailleurs

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = l(x + \sqrt{x^2-1}).$$

Donc, en changeant x en z ,

$$\int \frac{-dz}{\sqrt{z^2-1}} = -(lz + \sqrt{z^2-1})$$

et, en remettant pour z sa valeur $\frac{1}{x}$,

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = -\left(\frac{1}{x} + \sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right) + C.$$

ou

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} = l\left(\frac{\sqrt{1-x^2}-1}{x}\right) + C.$$

Si maintenant on fait dans la formule (a) $m=5$, $m=7$, etc., on en déduira

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}} &= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{4x^4} + \frac{3}{4} \int \frac{dx}{x^5\sqrt{1-x^2}}, \\ \int \frac{dx}{x^7\sqrt{1-x^2}} &= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{6x^8} + \frac{5}{6} \int \frac{dx}{x^9\sqrt{1-x^2}}, \\ \int \frac{dx}{x^9\sqrt{1-x^2}} &= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{8x^{10}} + \frac{7}{8} \int \frac{dx}{x^{11}\sqrt{1-x^2}}; \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

faisant dans la même formule $m=2$, $m=4$, $m=6$, etc., on aura ensuite

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^3\sqrt{1-x^2}} &= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{x}, \\ \int \frac{dx}{x^5\sqrt{1-x^2}} &= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{3x^3} + \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x^7\sqrt{1-x^2}}, \\ \int \frac{dx}{x^7\sqrt{1-x^2}} &= -\frac{\sqrt{1-x^2}}{5x^5} + \frac{4}{5} \int \frac{dx}{x^9\sqrt{1-x^2}}; \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

et de ces deux groupes d'équations se déduiront des formules analogues aux précédentes.

25. Proposons-nous encore d'intégrer la différentielle binôme

$$\frac{x^m dx}{\sqrt{ax-x^2}},$$

qui se présente dans le calcul des oscillations du pendule.

On a

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{ax - x^2}} = \int \frac{x^{m-1} \left(x - \frac{a}{2}\right) dx}{\sqrt{ax - x^2}} + \frac{a}{2} \int \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{ax - x^2}},$$

et, en intégrant par parties,

$$\begin{aligned} & \int \frac{x^{m-1} \left(x - \frac{a}{2}\right) dx}{\sqrt{ax - x^2}} \\ &= -x^{m-1} \sqrt{ax - x^2} + (m-1) \int x^{m-2} dx \sqrt{ax - x^2} \\ &= x^{m-1} \sqrt{ax - x^2} + (m-1) \int \frac{x^{m-2}(ax - x^2)}{\sqrt{ax - x^2}} \\ &= x^{m-1} \sqrt{ax - x^2} + (m-1) a \int \frac{x^{m-2} dx}{\sqrt{ax - x^2}} - (m-1) \int \frac{x^m dx}{\sqrt{ax - x^2}}. \end{aligned}$$

Substituant cette valeur dans la première équation et réduisant, il vient

$$\int \frac{x^m dx}{\sqrt{ax - x^2}} = -\frac{x^{m-1} \sqrt{ax - x^2}}{m} + \frac{(2m-1)a}{2m} \int \frac{x^{m-1} dx}{\sqrt{ax - x^2}}.$$

En appliquant le même procédé, on diminuera successivement l'exposant m d'une unité. On parviendra ainsi à l'intégrale $\int \frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}}$ que l'on pourra obtenir, car

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{ax - x^2}} &= \int \frac{dx}{\sqrt{\frac{a^2}{4} \left(\frac{a}{2} - x\right)^2}} = \int \frac{\frac{2}{a} dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{a - 2x}{a}\right)^2}} \\ &= \arccos \frac{a - 2x}{a} + C. \end{aligned}$$

CHAPITRE V.

INTÉGRATION DES FONCTIONS TRANSCENDANTES.

INTÉGRATION DES FONCTIONS EXPONENTIELLES, LOGARITHMIQUES ET CIRCULAIRES.

26. L'intégrale de la différentielle $F(x) dx$ étant connue, on connaîtra également les intégrales des fonctions différentielles suivantes :

$$F(e^x)e^x dx, F(a^x)a^x dx, F(lx) \frac{dx}{x}$$

$$F(\sin x) \cos x dx, F(\cos x) \sin x dx$$

$$F(\arcsin x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, F(\arccos x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}, F(\arctan x) \frac{dx}{1+x^2}$$

qui sont des fonctions algébriques d'une transcendante multipliées par la différentielle de cette transcendante.

Par exemple, si l'on demande $\int (lx)^m \frac{dx}{x}$, on fera $lx=z$;
d'où $\frac{dx}{x} = dz$, et l'on aura

$$\int (lx)^m \frac{dx}{x} = \int z^m dz = \frac{z^{m+1}}{m+1} + C,$$

ou, en remettant pour z sa valeur lx ,

$$\int (lx)^m \frac{dx}{x} = \frac{(lx)^{m+1}}{m+1} + C.$$

De même, si F désigne une fonction algébrique, on voit que l'on rendra algébriques les fonctions différentielles de la forme

$$F(e^x)dx, F(\sin x, \cos x)dx \\ F(\sin x, \sin 2x, \dots, \cos x, \cos 2x, \dots)dx$$

en posant $e^x = z$ pour la première, et $\sin x = z$ ou $\cos x = z$ pour les deux autres.

Par exemple, si l'on prend

$$\int F(\sin x, \cos x) dx,$$

ou posant

$$\sin x = z, \cos x = \sqrt{1 - z^2}, dx = \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}},$$

cette intégrale deviendra

$$\int F\left(z, \sqrt{1 - z^2}\right) \frac{dz}{\sqrt{1 - z^2}};$$

et elle sera ainsi rendue algébrique.

27. Soit maintenant la fonction $Pz^n dz$, dans laquelle P désigne une fonction algébrique et z une fonction transcendante de x . Posons

$$\int P dx = Q, \int Q \frac{dz}{dx} dx = R, \int R \frac{dz}{dx} dx = S, \dots$$

En intégrant par parties, on aura

$$\int Pz^n dx = Qz^n - n \int Qz^{n-1} \frac{dz}{dx} dx, \\ \int Qz^{n-1} \frac{dz}{dx} dx = Rz^{n-1} - (n-1) \int Rz^{n-2} \frac{dz}{dx} dx, \\ \int Rz^{n-2} \frac{dz}{dx} dx = Sz^{n-2} - (n-2) \int Sz^{n-3} \frac{dz}{dx} dx,$$

et substituant chaque intégrale dans celle qui la précède, il viendra

$$\int Pz^n dx = Qz^n - nRz^{n-1} + n(n-1)Sz^{n-2} - \dots$$

Si donc n est entier et que l'on puisse obtenir les fonctions désignées par Q , R , S , etc., on aura l'intégrale cherchée

$$\int Pz^n dx.$$

Soit, par exemple, la fonction

$$x^{m-1}(lx)^n dx.$$

On a

$$P = x^{m-1}, \quad z = lx, \quad \frac{dz}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$Q = \frac{x^m}{m}, \quad R = \frac{x^m}{m^2}, \quad S = \frac{x^m}{m^3}.$$

Donc

$$\int x^{m-1}(lx)^n dx = \frac{x^m}{m} \left[\frac{(lx)^n - \frac{n}{m}(lx)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{m^2}(lx)^{n-2} - \dots}{\pm \frac{n(n-1)\dots 3.2.1}{m^n}} \right] + C.$$

Si l'on suppose dans cette formule $lx = z$, elle devient

$$\int z^n e^{mz} dz = \frac{e^{mz}}{m} \left[\frac{z^n - \frac{n}{m}z^{n-1} + \frac{n(n-1)}{m^2}z^{n-2} - \dots}{\pm \frac{n(n-1)\dots 3.2.1}{m^n}} \right] + C.$$

Soit encore

$$(\arcsin x)^n dx;$$

faisant $z = \arcsin x$, $P = 1$, on a

$$Q = \int P dx = x, \quad R = \int \frac{x dx}{\sqrt{1-x^2}} = -\sqrt{1-x^2},$$

$$S = \int -\sqrt{1-x^2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = -x,$$

$$T = \int \frac{-x dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sqrt{1-x^2}.$$

Donc

$$\int (\text{arc sin } x)^n dx = \left[x + n \frac{\sqrt{1-x^2}}{\text{arc sin } x} - \frac{n(n-1)x}{(\text{arc sin } x)^2} - \frac{n(n-1)(n-2)\sqrt{1-x^2}}{(\text{arc sin } x)^3} + \dots \right] (\text{arc sin } x)^n + C.$$

Si, dans cette formule, on pose $\text{arc sin } x = z$; d'où

$$x = \text{sin } z, \quad dx = \cos z \, dz, \quad \sqrt{1-x^2} = \cos z,$$

il vient

$$\begin{aligned} \int z^n \cos z \, dz &= \text{sin } z [z^n - n(n-1)z^{n-2} + \dots] \\ &+ \cos z [nz^{n-1} - n(n-1)(n-2)z^{n-3} + \dots] + C. \end{aligned}$$

INTÉGRATION DES FONCTIONS DE LA FORME $e^{ax} \cos bx \, dx$,

$$e^{ax} \sin bxdx \quad \text{et} \quad \sin^m x \cos^n x dx.$$

28. Considérons d'abord les deux intégrales

$$\int e^{ax} \cos bxdx, \quad \int e^{ax} \sin bxdx.$$

Elles peuvent être déterminées à la fois au moyen de l'intégration par parties. En effet, on a, parce que $e^{ax} dx = d \frac{e^{ax}}{a}$,

$$\int e^{ax} \cos bxdx = \frac{e^{ax} \cos bx}{a} + \frac{b}{a} \int e^{ax} \sin bxdx,$$

$$\int e^{ax} \sin bxdx = \frac{e^{ax} \sin bx}{a} - \frac{b}{a} \int e^{ax} \cos bxdx:$$

et de ces équations, on en tire

$$\int e^{ax} \cos bx dx = \frac{a \cos bx - b \sin bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C,$$

$$\int e^{ax} \sin bx dx = \frac{a \sin bx + b \cos bx}{a^2 + b^2} e^{ax} + C.$$

29. On peut encore déterminer les deux intégrales

$$\int z^n e^{az} \cos bz dz, \quad \int z^n e^{az} \sin bz dz,$$

en réduisant l'exposant de z ; mais il est plus simple de déduire ces valeurs de la formule qui donne $\int z^n e^{az} dz$. Il suffit, pour cela, de remplacer dans cette formule m par $a + b\sqrt{-1}$; ce qui donne

$$\begin{aligned} & \int z^n e^{az} (\cos bz + \sqrt{-1} \sin bz) dz \\ &= \frac{e^{az} (\cos bz + \sqrt{-1} \sin bz)}{a + b\sqrt{-1}} \left[\begin{aligned} & z^n - \frac{n z^{n-1}}{a + b\sqrt{-1}} + \frac{n(n-1) z^{n-2}}{(a + b\sqrt{-1})^2} - \\ & \pm \frac{n(n-1) \dots 3.2.1}{(a + b\sqrt{-1})^n} \end{aligned} \right] + C; \end{aligned}$$

et, égalant ensuite séparément les parties réelles et les parties imaginaires des deux membres, on obtient les valeurs dont il s'agit.

30. Considérons maintenant les différentielles de la forme

$$\sin^m x \cos^n x dx,$$

m et n étant des nombres quelconques, positifs ou négatifs.

Une simple substitution ramène ces différentielles à celles binômes. En effet, si l'on pose $\sin x = z$; d'où :

$$\cos x = (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}, \text{ et } dx = (1 - z^2)^{-\frac{1}{2}} dz,$$

on aura

$$\sin^m x \cos^n x dx = z^m (1 - z^2)^{\frac{n-1}{2}} dz;$$

et cette fonction deviendra rationnelle et par conséquent intégrable, par la substitution du n° (19), toutes les fois que n sera un nombre impair; car alors $\frac{n-1}{2}$ sera nécessairement un nombre entier.

On peut encore poser $\cos x = z$, et il vient :

$$-z^n (1 - z^2)^{\frac{m-1}{2}} dz,$$

fonction qui est intégrable, si m est un nombre entier impair, positif ou négatif.

31. On parvient directement à intégrer la fonction dont il s'agit, en appliquant à cette fonction l'intégration par parties.

En effet, on a

$$\begin{aligned} \int \sin^m x \cdot \cos^n x \cdot dx &= \int \cos^{n-1} x \sin^m x \cos x dx \\ &= \int \cos^{n-1} x \sin^m d \sin x = \int \cos^{n-1} x d \cdot \frac{\sin^{m+1} x}{m+1}, \end{aligned}$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} \int \sin^m x \cos^n x dx &= \cos^{n-1} x \frac{\sin^{m+1} x}{m+1} \\ &+ \frac{n-1}{m+1} \int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x dx. \end{aligned}$$

On a d'ailleurs

$$\begin{aligned} \int \sin^{m+2} x \cos^{n-2} x dx &= \int (\sin^m x \cos^{n-2} x) (1 - \cos^2 x) dx \\ &= \int \sin^m x \cos^{n-2} x dx - \int \sin^m x \cos^n x dx. \end{aligned}$$

Donc

$$\int \sin^m x \cos^n x dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin^{m+1} x}{m+1} + \frac{n-1}{m+1} \left(\int \sin^m x \cos^{n-2} x dx - \int \sin^m x \cos^n x dx \right),$$

et, par conséquent,

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int \sin^m x \cos^n x dx = \frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{m+1} \\ \quad + \frac{n-1}{m+1} \int \sin^m x \cos^{n-2} x dx. \end{array} \right.$$

Cette formule convient à la réduction de l'exposant n . Pour celle relative à l'exposant m de $\sin x$, on a

$$\begin{aligned} \int \sin^m x \cos^n x dx &= \int \sin^{m-1} x \cos^n x \sin x dx \\ &= -\frac{\cos^{n+1} x \sin^{m-1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x dx; \end{aligned}$$

et comme

$$\begin{aligned} &\int \sin^{m-2} x \cos^{n+2} x dx \\ &= \int (\sin^{m-2} x \cos^n x) (1 - \sin^2 x) dx \\ &= \int \sin^{m-2} x \cos^n x dx - \int \sin^m x \cos^n x dx, \end{aligned}$$

il en résulte

$$\begin{aligned} &\int \sin^m x \cos^n x dx \\ &= -\frac{\cos^{n+1} x \sin^{m-1} x}{n+1} + \frac{m-1}{n+1} \left(\int \sin^{m-2} x \cos^n x dx - \int \sin^m x \cos^n x dx \right); \end{aligned}$$

ainsi :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} \int \sin^m x \cos^n x dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m+n} \\ \quad + \frac{m-1}{n+1} \int \sin^{m-2} x \cos^n x dx. \end{array} \right.$$

Les formules (1) et (2) réduisent de deux unités chacun des exposants m et n . En les combinant successivement, on parviendra donc à réduire ces exposants à 0 ou à 1, suivant qu'ils seront pairs ou impairs, et l'on sera ainsi ramené à l'une des intégrales suivantes :

$$\int dx, \quad \int \cos x dx, \quad \int \sin x dx, \quad \int \sin x \cos x dx,$$

dont les valeurs respectives sont :

$$\int dx = x + C, \quad \int \cos x dx = \sin x + C$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + C, \quad \int \sin x \cos x dx = \int \sin x d \sin x = \frac{\sin^2 x}{2} + C$$

Soit, par exemple, l'intégrale

$$\int \sin^4 x \cos^3 x dx.$$

La première formule donne d'abord

$$\int \sin^4 x \cos^3 x dx = -\frac{1}{6} \sin^3 x \cos^3 x + \frac{5}{6} \int \sin^2 x \cos^3 x dx,$$

puis

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx = -\frac{1}{4} \sin x \cos^3 x + \frac{1}{4} \int \cos^3 x dx.$$

On a ensuite par la seconde

$$\int \cos^3 x dx = \frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} \int dx.$$

On est ainsi ramené à l'intégrale $\int dx$, dont la valeur est $x + C$; donc :

$$\begin{aligned} & \int \sin^4 x \cos^2 x \, dx \\ &= \frac{1}{6} \sin^3 x \cos^3 x - \frac{3 \cdot 1}{6 \cdot 4} \sin x \cos^3 x + \frac{3 \cdot 1 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} \sin x \cos x + \frac{3 \cdot 1 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} x + C. \end{aligned}$$

32. Les formules précédentes ne peuvent plus être employées lorsque les exposants m et n sont négatifs. Mais on peut les transformer en d'autres qui s'appliquent aux cas dont il s'agit.

Supposons d'abord n négatif. La formule (1) donne

$$\begin{aligned} & \int \sin^m x \cos^n x \, dx \\ &= -\frac{\sin^{m+1} x \cos^{n-1} x}{n-1} + \frac{m+1}{n-1} \int \sin^m x \cos^n x \, dx, \end{aligned}$$

et changeant n en $-n+2$, il vient

$$(3) \quad \int \frac{\sin^m x}{\cos^n x} \, dx = \frac{\sin^{m+1} x}{(n-1) \cos^{n-1} x} + \frac{n-m-2}{n-1} \int \frac{\sin^m x}{\cos^{n-2} x} \, dx.$$

Si m est négatif, on tire de la formule (2)

$$\begin{aligned} & \int \sin^{m-2} x \cos^n x \, dx \\ &= \frac{\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x}{m-1} + \frac{m+1}{m-1} \int \sin^m x \cos^n x \, dx, \end{aligned}$$

et, changeant m en $-m+2$, on a

$$(4) \quad \int \frac{\cos^n x}{\sin^m x} \, dx = -\frac{\cos^{n+1} x}{(m-1) \sin^{m-1} x} + \frac{m-n-2}{m-1} \int \frac{\cos^n x}{\sin^{m-2} x} \, dx.$$

Ces formules (3) et (4) permettent de réduire de deux unités chacun des exposants m et n . Par leur combinaison succes-

sive, on parviendra donc à réduire ces exposants à 0 ou à 1, et l'on sera alors ramené à l'une des intégrales suivantes :

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx, \quad \int \frac{\cos x}{\sin x} dx, \quad \int \frac{dx}{\sin x \cos x}, \quad \int \frac{dx}{\sin x}, \quad \int \frac{dx}{\cos x},$$

dont les valeurs respectives sont :

$$\int \frac{\sin x}{\cos x} dx = -l \cos x + C, \quad \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = l \sin x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos x} = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 x}}{\frac{\sin x}{\cos x}} = \int \frac{d \tan x}{\tan x} = l \tan x + C,$$

$$\int \frac{dx}{\sin x} = \frac{dx}{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}} = \int \frac{\frac{d \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2}}}{\frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}}} = \int \frac{d \tan \frac{x}{2}}{\tan \frac{x}{2}} = l \tan \frac{x}{2} + C,$$

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\cos x} &= \int \frac{dx}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)} = - \int \frac{d \left(\frac{\pi}{2} - x \right)}{\sin \left(\frac{\pi}{2} - x \right)}, \\ &= -l \tan \left(\frac{\pi}{4} - \frac{x}{2} \right) + C = l \tan \left(\frac{\pi}{4} + \frac{x}{2} \right) + C... \end{aligned}$$

CAS PARTICULIERS.

33. Si dans la formule (1) on suppose $m = 0$, il en résulte :

$$\int \sin^m x dx = -\frac{\sin^{m-1} x \cos x}{m} + \frac{m-1}{m} \int \sin^{m-2} x dx.$$

Par suite, on a, si m est pair,

$$\int \sin^m x dx = -\frac{\cos x}{m} \left[\begin{aligned} &\sin^{m-1} x + \frac{m-1}{m-2} \sin^{m-3} x + \dots \\ &\frac{3 \cdot 5 \dots (m-3) (m-1)}{2 \cdot 4 \dots (m-4) (m-2)} \sin x \\ &+ \frac{1 \cdot 3 \dots (m-3) (m-1)}{2 \cdot 4 \dots (m-2) m} x + C \end{aligned} \right],$$

et, si m est impair,

$$\int \sin^m x dx = -\frac{\cos x}{m} \left[\begin{aligned} &\sin^{m-1} x + \frac{m-1}{m-2} \sin^{m-3} x + \dots \\ &+ \frac{2 \cdot 4 \dots (m-3) (m-1)}{1 \cdot 3 \dots (m-4) (m-2)} \end{aligned} \right] + C.$$

De même, si dans la formule (2) on suppose $m = 0$, on a

$$\int \cos^n x dx = \frac{\sin x \cos^{n-1} x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx.$$

Par conséquent, si n est pair,

$$\int \cos^n x dx = \frac{\sin x}{n} \left[\begin{aligned} &\cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n-2} \cos^{n-3} x + \dots \\ &+ \frac{3 \cdot 5 \dots (n-3) (n-1)}{2 \cdot 4 \dots (n-4) (n-2)} \cos x \\ &+ \frac{1 \cdot 3 \dots (n-3) (n-1)}{2 \cdot 4 \dots (n-2) n} x + C \end{aligned} \right],$$

et, si n est impair,

$$\int \cos^n x dx = \frac{\sin x}{n} \left[\begin{aligned} &\cos^{n-1} x + \frac{n-1}{n-2} \cos^{n-3} x + \dots \\ &+ \frac{2 \cdot 4 \dots (n-3) (n-1)}{1 \cdot 3 \dots (n-4) (n-2)} \end{aligned} \right] + C.$$

On a encore, en supposant $m = n$ dans les formules (3) et (4),

$$\int \frac{\sin^n x}{\cos^n x} dx = \int \tan^n x dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x dx,$$

$$\int \frac{\cos^n x}{\sin^n x} dx = \int \cot^n x dx = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - \int \cot^{n-2} x dx.$$

Donc, si n est pair,

$$\int \tan^n x dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \frac{\tan^{n-3} x}{n-3} + \dots \pm \tan x \mp x + C,$$

$$\int \cot^n x dx = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} + \frac{\cot^{n-3} x}{n-3} - \dots \pm \cot x \mp x + C;$$

et, si n est impair,

$$\int \tan^n x dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \frac{\tan^{n-3} x}{n-3} + \dots \pm \frac{\tan^2 x}{2} \pm l \cos x + C,$$

$$\int \cot^n x dx = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} + \frac{\cot^{n-3} x}{n-3} + \dots \pm \frac{\cot^2 x}{2} \pm l \sin x + C.$$

EXEMPLES D'INTÉGRATION.

34. Soit

$$(1) \quad u = \int \frac{dx}{a + b \cos x}.$$

On a

$$u = \int \frac{dx}{(a+b) \cos^2 \frac{1}{2} x + (a-b) \sin^2 \frac{1}{2} x},$$

ou en divisant par $\cos^2 \frac{1}{2} x$,

$$u = \int \frac{\frac{dx}{\cos^2 \frac{1}{2} x}}{(a+b) + (a-b) \tan^2 \frac{1}{2} x}.$$

En posant $\tan \frac{1}{2} x = z$, on trouve pour $x > b$:

$$u = \frac{1}{\sqrt{a^2 - b^2}} \arccos \frac{b + a \cos x}{a + b \cos x} + C;$$

pour $a < b$

$$u = \frac{1}{\sqrt{(b^2 - a^2)}} l \frac{\sqrt{b+a} + \sqrt{b-a} \tan \frac{1}{2} x}{\sqrt{b+a} - \sqrt{b-a} \tan \frac{1}{2} x} + C,$$

et, pour $a = b$,

$$u = \frac{1}{a} \tan \frac{1}{2} x + C.$$

Soit encore

$$(2) \quad u = \int \frac{dx}{a \cos^2 x + b \sin^2 x}.$$

On trouve

$$u = (ab)^{-\frac{1}{2}} \arctan \left[\sqrt{\left(\frac{b}{a}\right)} \tan x \right] + C.$$

Pour

$$(3) \quad u = \int \frac{dx}{a + b \tan^2 x},$$

On a

$$u = \int \frac{\cos x dx}{a \cos x + b \sin x} = \frac{1}{a^2 + b^2} [ax + b l(a \cos x + b \sin x)] + C,$$

et pour

$$(4) \quad u = \int \frac{\tan x dx}{\sqrt{a + b \tan^2 x}},$$

$$u = \int \frac{\sin x dx}{\sqrt{b - (b-a) \cos^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{b-a}} \arccos \left[\sqrt{\left(\frac{b-a}{b}\right)} \cos x \right] + C.$$

Soit maintenant

$$(5) \quad u = \int e^x \operatorname{tang} e^x dx.$$

On a

$$u = -l \cos e^x + C.$$

Pour

$$(6) \quad u = \int \frac{a^x}{\cos^2(a^x)} dx,$$

on trouve

$$u = \frac{\operatorname{tang}(a^x)}{lm} + C;$$

et pour

$$(7) \quad u = \int \frac{lx}{x \sqrt{a + l^2 x}},$$

$$u = \sqrt{a + l^2 x} + C.$$

Soit ensuite

$$(8) \quad u = \int \frac{x \operatorname{arc} \sin x}{\sqrt{1-x^2}} dx.$$

On trouve

$$u = x - \sqrt{1-x^2} \operatorname{arc} \sin x + C$$

Pour

$$(9) \quad u = \int \operatorname{arc} \sin \sqrt{\left(\frac{x}{a+b}\right)} dx,$$

il vient

$$u = (x+a) \operatorname{arc} \sin \sqrt{\left(\frac{x}{a+b}\right)} = \sqrt{ax+C},$$

On a pour

$$(10) \quad u = \int x \operatorname{arc} \sin \sqrt{\frac{2a-x}{4a}} dx,$$

$$u = \frac{x^2}{2} \operatorname{arc} \sin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2a-x}{4a}} + \frac{1}{4} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4a^2-x^2}},$$

et parce que

$$\frac{1}{4} \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{4a^2-x^2}} = \frac{a^2}{2} \operatorname{arc} \sin \frac{x}{2a} - \frac{x}{8} \sqrt{4a^2-x^2} + C,$$

$$u = \frac{x^2}{2} \operatorname{arc} \sin \frac{1}{2} \sqrt{\frac{2a-x}{4a}} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arc} \sin \frac{x}{2a} - \frac{x}{8} \sqrt{4a^2-x^2} + C,$$

Pour

(11)

on trouve

$$u = \int \frac{e^{a \operatorname{arctg} x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}} dx,$$

$$u = \frac{e^{a \operatorname{arctg} x} (a+x)}{(1+a^2)(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

CHAPITRE VI.

INTÉGRATION PAR SÉRIES.

DÉVELOPPEMENT DE L'INTÉGRALE $\int F(x) dx$ EN SÉRIE.

35. Lorsque la différentielle $F(x) dx$ ne peut pas être intégrée par les méthodes qui précèdent, on développe $F(x)$ en série, et, multipliant alors chaque terme du développement par dx , on a à intégrer une suite de différentielles monômes. On obtient par ce moyen une valeur approchée de l'intégrale $\int F(x) dx$, si la fonction $F(x)$ est une série convergente.

Soit donc

$$(1) \quad F(x) = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + r_n,$$

une telle série. On aura

$$F(x) dx = (u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n + r_n) dx,$$

et, ensuite, en intégrant les deux membres entre deux limites quelconques a et b ,

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x) dx &= \int_a^b u_0 dx + \int_a^b u_1 dx + \int_a^b u_2 dx + \dots \\ &\quad + \int_a^b u_n dx + \int_a^b r_n dx. \end{aligned}$$

Mais le reste r_n tend vers zéro à mesure que n augmente ; et il en est de même de $\int_a^b r_n dx$; donc la série

$$\int_a^b u_0 dx + \int_a^b u_1 dx + \int_a^b u_2 dx + \dots + \int_a^b u_n dx + \dots$$

est convergente et a pour somme $\int_a^b F(x) dx$. Ainsi :

$$(2) \quad \int_a^b F(x) dx = \int_a^b u_0 dx + \int_a^b u_1 dx + \int_a^b u_2 dx + \dots$$

Si l'on remplace dans cette formule b par x , on aura

$$\int_a^x F(x) dx = \int_a^x u_0 dx + \int_a^x u_1 dx + \int_a^x u_2 dx + \dots$$

36. Il est aisé de démontrer que la formule (2) subsiste encore lors même que la série (1), supposée convergente entre les limites a et b , deviendrait divergente pour l'une de ces limites ou pour toutes les deux, pourvu toutefois que la série (2) ne cesse pas d'être convergente.

En effet soient μ , ξ , deux quantités comprises entre a et b . La formule (2) démontrée pour les limites a , b , le sera encore pour celles μ , ξ , et l'on aura

$$\int_{\mu}^{\xi} F(x) dx = \int_{\mu}^{\xi} u_0 dx + \int_{\mu}^{\xi} u_1 dx + \dots + \int_{\mu}^{\xi} u_n dx + \dots$$

Or, si l'on fait tendre μ vers la première limite a , et ξ vers la seconde b , les deux membres de cette série, qui sont des fonctions continues de x , et qui ont constamment la même valeur, tendront l'un et l'autre vers une limite, et ces limites ne pourront être inégales. Donc

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b u_0 dx + \int_a^b u_1 dx + \int_a^b u_2 dx + \dots$$

Le développement de la fonction $F(x)$ en série convergente

peut aussi se faire à l'aide de la formule de Maclaurin. En effet, on a

$$F(x) = F(0) + x F'(0) + \frac{x^2}{1.2} F''(0) + \frac{x^3}{1.2.3} F'''(0) + \dots,$$

et, par suite, en intégrant,

$$(3) \int F(x) dx = C + x F(0) + \frac{x^2}{1.2} F'(0) + \frac{x^3}{1.2.3} F''(0) + \dots,$$

C désignant une constante arbitraire.

37. On parvient encore au développement de $\int F(x) dx$, en faisant usage de la formule de Bernoulli donnée au n° (74) du tome I. On trouve, en effet, par cette formule,

$$(4) \int F(x) dx = C + x F(x) - \frac{x^2}{1.2} F'(x) + \frac{x^3}{1.2.3} F''(x) - \dots$$

38. On arrive aussi à ce résultat, en appliquant à $F(x) dx$ l'intégration par parties.

En effet, on a

$$\begin{aligned} \int F(x) dx &= x F(x) - \int x F'(x) dx, \\ \int x F'(x) dx &= \frac{x^2}{1.2} F''(x) - \int \frac{x^2}{1.2} F''(x) dx, \\ \int \frac{x^2}{1.2} F''(x) dx &= \frac{x^3}{1.2.3} F'''(x) - \int \frac{x^3}{1.2.3} F'''(x) dx; \end{aligned}$$

et, ainsi de suite. On a donc en substituant

$$\int F(x) dx = C + x F(x) - \frac{x^2}{1.2} F'(x) + \frac{x^3}{1.2.3} F''(x) - \dots$$

formule qui est bien celle (4).

EXEMPLES D'INTÉGRATION PAR LES SÉRIES.

39. Soit d'abord

$$(1) \quad \int \frac{dx}{1+x} = l(1+x).$$

En ayant simplement recours à la division, on trouve

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - \dots$$

Par suite, il vient, en multipliant par dx et intégrant,

$$\int \frac{dx}{1+x} = l(1+x) = C + x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots$$

Pour déterminer la constante C , il suffit de faire $x = 0$, alors le premier membre se réduit à $l_1 = 0$; le second disparaît, en sorte que $C = 0$; par conséquent

$$l(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} - \dots,$$

Soit encore

$$(2) \quad \int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang } x.$$

On a

$$\frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + x^8 - \dots,$$

et, par conséquent,

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \text{arc tang } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots$$

L'arc et la tangente étant nuls en même temps, on a $C = 0$ donc

$$\text{arc tang } x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \frac{x^9}{9} - \dots$$

Cette série cesse d'être convergente lorsque $x > 1$; c'est-à-dire quand l'arc surpasse $\frac{\pi}{4}$. Dans ce cas, on doit poser

$$\frac{1}{x^2 + 1} = \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} - \frac{1}{x^8} + \dots,$$

et l'on a

$$\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \text{arc tang } x = C - \frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} - \frac{1}{5x^5} + \frac{1}{7x^7} - \dots$$

Soit

$$(3) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \text{ arc sin } x.$$

En développant $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ par la formule du binôme, on

$$(4) \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = 1 + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1.3}{2.4} x^4 + \frac{1.3.5}{2.4.6} x^6 + \dots$$

Multipliant par dx et intégrant, il vient

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \text{arcsin } x = C + x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{x^7}{7} + \dots$$

L'arc et le sinus étant nuls en même temps, on a $C = 0$; donc :

$$(6) \quad \text{arcsin } x = x + \frac{1}{2} \frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{x^7}{7} + \dots$$

Pour $x = 1$, la série (4) cesse d'être convergente; mais comme celle (6) ne cesse pas de l'être, on a

$$\frac{\pi}{2} = 1 + \frac{1}{2} \frac{1}{3} + \frac{1.3}{2.4} \frac{1}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6} \frac{1}{7} + \dots$$

Soit enfin la différentielle

$$(4) \quad \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2} \sqrt{1-bx}}$$

qui se présente dans la mécanique. En développant le facteur $(1-bx)^{-\frac{1}{2}}$, on aura

$$(1-bx)^{-\frac{1}{2}} = 1 + \frac{1}{2}bx + \frac{1.3}{2.4}b^2x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}b^3x^3 + \dots$$

et, substituant dans la proposée, il viendra

$$\begin{aligned} & \int \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2} \sqrt{1-bx}} \\ &= \frac{dx}{\sqrt{ax-x^2}} \left(1 + \frac{1}{2}bx + \frac{1.3}{2.4}b^2x^2 + \frac{1.3.5}{2.4.6}b^3x^3 + \dots \right) \end{aligned}$$

On sera ainsi ramené à intégrer une expression de la forme $\frac{x^m dx}{\sqrt{ax-x^2}}$; or, c'est ce que l'on sait faire d'après ce qui a été dit au n° (19).

CHAPITRE VII.

INTÉGRATION DES FONCTIONS DIFFÉRENTIELLES DE PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES.

CONDITION D'INTÉGRABILITÉ DES FONCTIONS DE DEUX VARIABLES ET INTÉGRATION DE CES FONCTIONS.

40. Intégrer une différentielle de la forme

$$Mdx + Ndy + Pdz + \dots$$

dans laquelle $M, N, P, \dots$ sont des fonctions de $x, y, z, \dots$, c'est trouver une fonction de ces variables $F(x, y, z, \dots)$ dont cette expression soit la différentielle totale.

Considérons d'abord le cas de deux variables indépendantes; et soit

$$Mdx + Ndy$$

la fonction différentielle qu'il s'agit d'intégrer, M et N étant des fonctions des variables x et y . Pour qu'une telle fonction soit la différentielle totale d'une fonction de x et y , il faut qu'il existe entre les quantités M et N une certaine relation que nous allons chercher.

Soit $u = F(x, y)$, on aura

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy,$$

et, comparant cette expression avec la proposée $Mdx + Ndy$, on en déduira

$$M = \frac{du}{dx}, \quad N = \frac{du}{dy}.$$

Or

$$\frac{d^2u}{dx dy} = \frac{d^2u}{dy dx}.$$

Donc

$$(1) \quad \frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}.$$

Telle est la condition nécessaire et suffisante pour que la fonction différentielle proposée soit intégrable.

Si donc cette condition (1) n'est pas remplie, il n'existera aucune fonction de x et y qui ait pour différentielle totale l'expression proposée $Mdx + Ndy$. Mais si elle a lieu, alors cette fonction u existera et on pourra l'obtenir de la manière suivante :

Posons

$$du = Mdx + Ndy.$$

L'intégrale u devant avoir Mdx pour différentielle par rapport à x , cette intégrale sera de la forme

$$u = \int Mdx + \psi(y),$$

$\psi(y)$ étant une fonction de y ; et il s'agit de déterminer cette fonction $\psi(y)$ par la condition que la dérivée de u par rapport à y soit N .

Or, en posant $\int Mdx = v$, on a

$$\frac{du}{dy} = \frac{dv}{dy} \frac{d\psi(y)}{dy} = N;$$

d'où

$$\frac{d\psi(y)}{dy} = N - \frac{dv}{dy},$$

et en intégrant

$$\psi(y) = \int \left(N - \frac{dv}{dy} \right) dy.$$

Pour l'intégrale cherchée, on aura donc

$$(2) \quad u = \int M dx + \int \left(N - \frac{dv}{dy} \right) dy.$$

41. Ce procédé suppose l'existence de la condition (1). En effet, l'expression $N - \frac{dv}{dy}$ ne devant pas contenir x , il s'ensuit que sa dérivée par rapport à cette variable doit être nulle, et qu'ainsi

$$\frac{dN}{dx} - \frac{d^2v}{dx dy} = 0.$$

Mais

$$\frac{d^2v}{dx dy} = \frac{d^2v}{dy dx} = d \frac{dv}{dx} = \frac{dM}{dy},$$

puisque $\frac{dv}{dx} = M$. Donc

$$\frac{dN}{dx} - \frac{dM}{dy} = 0,$$

et, par conséquent,

$$\frac{dN}{dx} = \frac{dM}{dy}.$$

42. EXEMPLE. Soit la fonction différentielle

$$\frac{y dx - x dy}{x^2 + y^2}$$

En écrivant cette fonction de la manière suivante :

$$\frac{y}{x^2 + y^2} dx - \frac{x}{x^2 + y^2} dy,$$

et comparant avec celle $M dx + N dy$, on en déduit

$$M = \frac{y}{x^2 + y^2}, \quad N = -\frac{x}{x^2 + y^2};$$

Par suite, on a

$$\frac{dM}{dy} = \frac{d}{dy} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) = \frac{x^2 + y^2 - y^2y}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{dN}{dx} = \frac{d}{dx} \left(\frac{-x}{x^2 + y^2} \right) = -\frac{x^2 + y^2 - x^2x}{(x^2 + y^2)^2} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2};$$

ainsi, la condition d'intégrabilité se trouve satisfaite.

Si maintenant on pose

$$u = \int \frac{y}{x^2 + y^2} dx + \psi(y) = \text{arc tang } \frac{x}{y} + \psi(y),$$

on aura, en différentiant,

$$du = \frac{ydx - xdy}{x^2 + y^2} + \psi'(y),$$

et, comparant avec la proposée, on en déduira $d\psi(y) = 0$, d'où $\psi(y) = C$. Par conséquent :

$$u = \text{arc tang } \frac{x}{y} + C.$$

CAS DE PLUSIEURS VARIABLES INDÉPENDANTES.

43. La même méthode s'applique sans difficulté au cas où le nombre des variables indépendantes est plus considérable. Considérons, par exemple, le cas de trois variables x, y, z , et soit

$$(1) \quad du = Mdx + Ndy + Pdz,$$

la fonction différentielle qu'il s'agit d'intégrer, M, N, P , étant des fonctions des variables x, y, z .

On a

$$du = \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz$$

et

$$M = \frac{du}{dx}, \quad N = \frac{du}{dy}, \quad P = \frac{du}{dz}.$$

Or

$$\frac{d^2u}{dxdy} = \frac{d^2u}{dydx}, \quad \frac{d^2u}{dxdz} = \frac{d^2u}{dzdx}, \quad \frac{d^2u}{dydz} = \frac{d^2u}{dzdy}.$$

Donc

$$(2) \quad \frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}, \quad \frac{dM}{dz} = \frac{dP}{dx}, \quad \frac{dN}{dz} = \frac{dP}{dy}.$$

Ces trois conditions (2) sont celles qui assurent l'intégrabilité de la fonction proposée (1). Lorsqu'elles auront lieu, la fonction u existera et l'on pourra toujours l'obtenir de la manière suivante :

La différentielle de la fonction u par rapport à x devant être Mdx , on a

$$u = \int Mdx + \psi(y, z),$$

$\psi(y, z)$ étant une fonction de y et z ; et il s'agit de déterminer cette fonction ψ par la condition que les dérivées de l'expression précédente, par rapport à z et à y , soient respectivement N et P .

Or, en posant $\int Mdx = v$, on a d'abord

$$\frac{du}{dy} = \frac{dv}{dy} + \frac{d\psi(y, z)}{dy} = N,$$

d'où

$$\frac{d\psi(y, z)}{dy} = N - \frac{dv}{dy},$$

et, en intégrant,

$$\psi(y, z) = \int dy \left(N - \frac{dv}{dy} \right) + f(z),$$

$f(z)$ désignant une fonction de z seule. Ainsi :

$$u = v + \int dy \left(N - \frac{dv}{dy} \right) + f(z).$$

Il nous reste encore à déterminer la fonction $f(z)$ par la condition que la dérivée de l'expression précédente par rapport à z soit P .

Or, en différentiant par rapport à z , on a

$$\frac{du}{dz} = \frac{dv}{dz} + \int dy \left(\frac{dN}{dz} - \frac{d^2v}{dy dz} \right) + \frac{df(z)}{dz} = P;$$

d'où l'on tire

$$\frac{df(z)}{dz} = P - \frac{dv}{dz} + \int dy \left(\frac{dN}{dz} - \frac{d^2v}{dy dz} \right),$$

et, en intégrant,

$$f(z) = \int dz \left[P - \frac{dv}{dz} - \int dy \left(\frac{dN}{dz} - \frac{d^2v}{dy dz} \right) \right].$$

Pour l'intégrale cherchée, on a donc

$$u = v + \int dy \left(N - \frac{dv}{dy} \right) + \int dz \left[P - \frac{dv}{dz} - \int dy \left(\frac{dN}{dz} - \frac{d^2v}{dy dz} \right) \right].$$

Ce qui précède s'applique au cas d'un nombre quelconque de variables. On voit en général que si n est le nombre des variables, $\frac{n(n-1)}{2}$ sera celui des conditions nécessaires et suffisantes pour que la fonction différentielle proposée soit intégrable.

EXEMPLES.

$$1. \quad du = \left(\frac{1}{y} - \frac{z}{x^2} \right) dx + \left(\frac{1}{z} - \frac{x}{y^2} \right) dy + \left(\frac{1}{x} - \frac{y}{z^2} \right) dz$$

$$u = \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + C.$$

$$2^{\circ} \quad du = \frac{y dx}{a-z} + \frac{x dy}{a-z} + \frac{xy dz}{(a-z)^2}$$

$$u = \frac{xy}{a-z} + C.$$

$$3^{\circ} \quad du = (y+z) dx + (z+x) dy + (x+y) dz$$

$$u = xy + yz + zx + C.$$

$$4^{\circ} \quad du = (e^y + ye^x) dx + (e^x + xe^y) dy$$

$$u = xe^y + ye^x + C.$$

$$5^{\circ} \quad du = \frac{adx - bdy}{z} + \frac{by - ax}{z^2} dz$$

$$u = \frac{ax - by}{z} + C.$$

$$6^{\circ} \quad du = \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} + \frac{yz}{x^2} \right) dx + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x} + \frac{xz}{y^2} \right) dy + \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} + \frac{xy}{z^2} \right) dz$$

$$u = \frac{xy}{z} + \frac{xz}{y} + \frac{yz}{x} + C.$$

CHAPITRE VIII.

DÉTERMINATION DES INTÉGRALES DÉFINIES.

VALEURS DE QUELQUES INTÉGRALES DÉFINIES SIMPLES.

44. Les géomètres ont fait connaître plusieurs méthodes à l'aide desquelles on parvient à déterminer les valeurs des intégrales définies. Nous nous bornerons ici à indiquer les principales.

Lorsque l'intégrale indéfinie de la fonction qui se trouve placée sous le signe $\int$ peut être déterminée, l'intégrale définie de la même fonction s'en déduit immédiatement.

EXEMPLES. Soit

$$(1) \quad \int_0^1 x^m dx;$$

comme

$$\int x^m dx = \frac{x^{m+1}}{m+1} + C,$$

on trouve, en appliquant la formule du n° (3), entre les limites 0 et 1,

$$\int_0^1 x^m dx = \frac{1}{m+1},$$

$m+1$ étant positif.

Soit encore

$$(2) \quad \int_a^b \frac{dx}{x};$$

puisque

$$\int \frac{dx}{x} = \log x + C,$$

on a, entre les limites a et b ,

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = \log \left(\frac{b}{a} \right).$$

Considérons maintenant les deux intégrales

$$(3) \quad \int_0^1 \frac{dx}{a^2 + x^2}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

On a

$$\int \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C.$$

Donc, entre les limites 0 et 1, on trouve respectivement :

$$\int_0^1 \frac{dx}{a^2 + x^2} = \frac{1}{a} \arctan 1 = \frac{\pi}{4a}, \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{2}.$$

Soient

$$(4) \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^m x dx.$$

D'après les formules du n° (33), on a 1° : si m est pair,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x dx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (m-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots m} \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^m x dx = \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m-3} + \dots \mp \frac{1}{3} \pm 1 \mp \frac{\pi}{4}$$

et 2°, si m est impair,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x dx = \frac{2.4.6 \dots (m-1)}{1.3.5.7 \dots m..}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^m x dx = \frac{1}{m-1} - \frac{1}{m-3} + \dots \mp \frac{1}{4} \pm \frac{1}{2} l \left(\frac{1}{2} \right).$$

On trouve de même, d'après les formules (1) du n° (31),

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m} x \sin^{2n} x dx = \frac{1.3.5 \dots (2m-1) 1.3.5 \dots (2n-1)}{2.4.6 \dots (2m+2n)} \frac{\pi}{2}.$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^{2m} x \sin^{2n+1} x dx = \frac{2.4.6 \dots 2n}{(2m+1)(2m+3) \dots (2m+2n+1)}.$$

$$\int_0^1 \frac{x^{2m}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{1.3.5 \dots (2m-5)(2m-3)(2m-1)}{2.4.6 \dots (2m-4)(2m-2).2m} \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^1 \frac{x^{2m+1}}{\sqrt{1-x^2}} dx = \frac{2.4.6 \dots (2m-4)(2m-2).2m}{1.3.5 \dots (2m-3)(2m-1)(2m+1)}.$$

45. Les valeurs de $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x dx$ et $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^m x dx$, données

dans ce paragraphe, conduisent à une expression remarquable du nombre π donnée par Wallis. En effet, si l'on remarque que ces valeurs tendent l'une et l'autre vers zéro à mesure que le nombre m pair ou impair augmente indéfiniment, on en conclut que le rapport de ces valeurs a pour limite l'unité, et par suite que

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2.2.4.4.6.6.8 \dots}{1.3.3.5.5.7.7.9 \dots}$$

ce qui est la formule annoncée.

46. Dans les exemples qui précèdent nous avons supposé que les limites a et b de l'intégration étaient finies; mais il

peut se faire que ces limites soient infinies. Dans ce cas, la valeur de l'intégrale peut être finie, infinie ou indéterminée.

EXEMPLES. Soit

$$(1) \quad \int_0^{\infty} e^{-x} dx.$$

L'intégrale indéfinie de la fonction $e^{-x} dx$ étant

$$\int e^{-x} dx = -e^{-x} + C,$$

on a d'abord

$$\int_0^b e^{-x} dx = 1 - \frac{1}{e^b},$$

et ensuite pour $b = \infty$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1.$$

Soit encore

$$(2) \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{x};$$

on a

$$\int \frac{dx}{x} = lx + C.$$

Par suite,

$$\int_a^b \frac{dx}{x} = l \left(\frac{b}{a} \right),$$

et en faisant $b = \infty$

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{x} = \infty,$$

valeur qui est infinie.

Pour

$$(3) \quad \int_0^{\infty} \cos x dx,$$

on a d'abord

$$\int_0^b \cos x dx = \sin b,$$

et ensuite

$$\int_0^{\infty} \cos x \, dx = \sin \infty - \sin 0,$$

valeur qui est indéterminée.

On a de même

$$\int_0^{\infty} e^{ax} \, dx = \infty, \quad \int_0^{\infty} e^{-ax} \, dx = \frac{1}{a},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{2a}, \quad \int_0^{\infty} \frac{dx}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{\pi}{a},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a} = \frac{\pi}{2\sqrt{a}}, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x-a)^2 + b^2} = \frac{\pi}{b},$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{x^{m-1}}{(1+x)^n} \, dx &= \frac{m-1}{n-m} \int_0^{\infty} \frac{x^{m-2}}{(1+x)^n} \, dx = \frac{(m-1) \dots 3 \cdot 2 \cdot 1}{(n-m) \dots (n-3) (n-2)} \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x)^n} \\ &= \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (m-1) (1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-m-1))}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (n-1)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^n} &= \frac{2n-3}{2n-2} \int_0^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^{n-1}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-5)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)} \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} \\ &= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots (2n-2)} \frac{\pi}{2}, \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(a+x^2)^{n+1}} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2n} \cdot \frac{\pi}{2} a^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)},$$

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bxdx = \frac{a}{a^2 + b^2}, \quad \int_0^{\infty} e^{-ax} \sin bxdx = \frac{b}{a^2 + b^2},$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} \, dx = 1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n, \quad \int_0^{\infty} x^n e^{-ax} \, dx = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{a^{n+1}},$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} (\cos bx + \sqrt{-1} \sin bx) \, dx = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots n}{(a + b \sqrt{-1})^{n+1}},$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} \sin bxdx = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots n}{(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}(n+1)}} \sin \left[(n+1) \arctan \frac{b}{a} \right],$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-ax} \cos bx dx = \frac{1.2.3 \dots n}{(a^2 + b^2)^{\frac{1}{2}} (1^{n+1})} \cos \left[(n+1) \arctan \frac{b}{a} \right].$$

47. On peut, dans certains cas, reconnaître si l'intégrale

$$\int_a^b F(x) dx$$

a une valeur finie et déterminée quand l'une de ses limites devient infinie.

En effet, soit ζ une quantité comprise entre les limites a et b . On a

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^{\zeta} F(x) dx + \int_{\zeta}^b F(x) dx;$$

et, comme la première partie a une valeur finie et déterminée, il suffit de considérer la seconde.

Or, en mettant la fonction $F(x)$ sous la forme

$$\frac{f(x)}{x^n},$$

$f(x)$ étant une fonction qui ne devient ni nulle ni infinie pour des valeurs de x comprises entre ζ et b ; et représentant par K et K_1 la plus grande et la plus petite des valeurs que prend $f(x)$ entre les mêmes limites, on aura, si $n > 1$,

$$F(x) < \frac{K}{x^n},$$

et, par suite,

$$\int_{\zeta}^b F(x) dx < \int_{\zeta}^b \frac{K}{x^n} dx < \frac{K}{n-1} \left(\frac{1}{\zeta^{n-1}} - \frac{1}{b^{n-1}} \right).$$

Quand $b = \infty$, le second membre de cette inégalité se réduit à $\frac{K}{(n-1)\zeta^{n-1}}$ et l'intégrale $\int_{\zeta}^b F(x) dx$ conserve une va-

leur finie et déterminée pour la même valeur. Par conséquent, il en est de même de la proposée $\int_a^b F(x)dx$.

Si $n < 1$ ou $n = 1$, on a

$$F(x) > \frac{K_1}{x^n}, \quad \text{ou} \quad F(x) > \frac{K_1}{x},$$

en sorte que

$$\int_{\zeta}^b F(x)dx > \int_{\zeta}^b \frac{K_1}{x^n} dx > \frac{K_1}{1-n} (b^{1-n} - \zeta^{1-n}),$$

$$\int_{\zeta}^b F(x)dx > \int_{\zeta}^b \frac{K_1}{x} dx > K_1 l \left(\frac{b}{\zeta} \right);$$

et comme l'une ou l'autre de ces valeurs devient infinie quand $b = \infty$, on en conclut que l'intégrale $\int_{\zeta}^b F(x)dx$, et par suite aussi la proposée $\int_a^b F(x)dx$ le devient également pour la même valeur.

CAS OÙ LA FONCTION SOUS LE SIGNE DEVIENT INFINIE AUX LIMITES DE L'INTÉGRATION.

48. Dans le cas où la fonction $F(x)$ sous le signe $\int$ devient infinie pour $x = b$, on définit $\int_a^b F(x)dx$ comme la limite vers laquelle tend l'intégrale $\int_a^{b-\epsilon} F(x)dx$ quand ϵ tend vers zéro.

Pareillement, si la fonction $F(x)$ devient infinie pour $x = a$, $\int_a^b F(x)dx$ est la limite vers laquelle tend l'intégrale $\int_{a+\epsilon}^b F(x)dx$ quand ϵ tend vers zéro.

On peut souvent reconnaître si l'intégrale

$$\int_a^b F(x)dx$$

a une valeur finie et déterminée quand la fonction $F(x)$ devient infinie aux limites de l'intégration.

En effet, soit ζ une quantité comprise entre a et b . On a

$$\int_a^b F(x)dx = \int_a^{\zeta} F(x)dx + \int_{\zeta}^b F(x)dx;$$

et la première partie de l'intégrale ayant une valeur finie, il suffit de considérer la seconde $\int_{\zeta}^b F(x)dx$.

Or, en mettant la fonction $F(x)$ sous la forme

$$\frac{\varphi(x)}{(b-x)^n},$$

n étant un exposant tel que la fonction $\varphi(x)$ ne devienne ni nulle ni infinie pour $x=b$; et représentant par K et K_1 la plus grande et la plus petite des valeurs que prend $\varphi(x)$ entre les limites ζ et b , on aura, si $n < 1$,

$$F(x) < \frac{K}{(b-x)^n},$$

ou

$$\int_{\zeta}^{b-\varepsilon} F(x)dx < \int_{\zeta}^b \frac{K}{(b-x)^n} dx,$$

c'est-à-dire

$$\int_{\zeta}^{b-\varepsilon} F(x)dx < \int_{\varphi}^b \frac{K}{n-1} [(b-\zeta)^{1-n} - \varepsilon^{1-n}].$$

Maintenant si l'on fait tendre ε vers zéro, le second membre de cette inégalité tendra vers la quantité finie

$$\frac{K}{1-n} (b-\zeta)^{1-n},$$

et $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\zeta}^{b-\epsilon} F(x) dx$ aura une valeur finie. Donc il en sera de même de la proposée $\int_a^b F(x) dx$.

Si n est supérieur à l'unité, on aura

$$\varphi(x) > \frac{K_1}{(b-x)^n},$$

en sorte que

$$\int_{\zeta}^{b-\epsilon} F(x) dx > \int_{\zeta}^{b-\epsilon} \frac{K}{(b-x)^n} dx,$$

ou

$$\int_{\zeta}^{b-\epsilon} F(x) dx > \frac{K_1}{n-1} \left[\frac{1}{\epsilon^{n-1}} - \frac{1}{(b-\zeta)^{n-1}} \right];$$

et comme en faisant tendre ϵ vers zéro, le second membre devient infini, on en conclut que $\int_{\zeta}^b F(x) dx$, et par suite $\int_{\zeta}^b F(x) dx$ est infinie.

Si $n=1$, on a

$$\varphi(x) > \frac{K_1}{b-x},$$

et

$$\int_{\zeta}^{b-\epsilon} F(x) dx > \int_{\zeta}^{b-\epsilon} \frac{K_1}{b-x} dx > K_1 \left(\frac{b-\zeta}{\epsilon} \right).$$

Mais pour $\epsilon=0$, le second membre devient infini. Donc $\int_{\zeta}^b F(x) dx$, et par suite aussi $\int_a^b F(x) dx$ est infinie.

Les mêmes remarques s'appliquent au cas où la fonction $F(x)$ devient infinie pour $x=a$.

CAS OU LA FONCTION SOUS LE SIGNE $\int$ DEVIENT INFINIE ENTRE
LIMITES DE L'INTÉGRATION.

49. Lorsque la fonction $F(x)$, sous le signe $\int$, devient infinie pour une certaine valeur de ζ comprise entre les limites a et b de l'intégration, on regarde $\int_a^b F(x)dx$ comme la limite vers laquelle tend la somme des intégrales

$$\int_a^{\zeta-\epsilon} F(x)dx, \quad \int_{\zeta+\eta}^b F(x)dx,$$

quand ϵ et η tendent vers zéro. On pose alors

$$\int_a^b F(x)dx = \lim \int_a^{\zeta-\epsilon} F(x)dx + \int_{\zeta+\eta}^b F(x)dx,$$

et, dans ce cas, l'intégrale peut avoir une valeur finie et déterminée ou infinie et indéterminée.

Considérons, par exemple, l'intégrale

$$\int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x}$$

dans laquelle a et b sont des quantités positives quelconques.

Pour $x=0$, la fonction $\frac{1}{x}$ devient infinie, et l'équation ci-dessus donne

$$\int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x} = \lim \int_{-a}^{\zeta-\epsilon} \frac{dx}{x} + \lim \int_{\zeta+\eta}^{+b} \frac{dx}{x}.$$

Or

$$\int_{-a}^{\zeta-\epsilon} \frac{dx}{x} = l\zeta - la,$$

$$\int_{\zeta+\eta}^{+b} \frac{dx}{x} = lb - l\eta.$$

Donc

$$\int_{-a}^{-\epsilon} \frac{dx}{x} + \int_{+\eta}^{+b} \frac{dx}{x} = lb - la + l\epsilon - l\eta,$$

ou

$$\int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x} = l\left(\frac{b}{a}\right) + l\left(\frac{\epsilon}{\eta}\right),$$

valeur qui est complètement indéterminée à cause de l'indépendance des quantités ϵ et η .

50. Lorsque dans la somme

$$\int_a^{\zeta-\epsilon} F(x)dx + \int_{\zeta+\eta}^b F(x)dx,$$

on suppose $\eta = \epsilon$, elle se réduit à

$$\int_a^{\zeta-\epsilon} F(x)dx + \int_{\zeta+\epsilon}^b F(x)dx,$$

et la limite vers laquelle tend cette somme quand on fait tendre ϵ vers zéro est ce que Cauchy a nommé la *valeur principale* de l'intégrale $\int_a^b F(x)dx$. Dans l'intégrale $\int_{-a}^{+b} \frac{dx}{x}$, par exemple, cette valeur principale est $l\left(\frac{b}{a}\right)$.

DÉTERMINATION DES INTÉGRALES DÉFINIES A L'AIDE DE LA DIFFÉRENTIATION ET DE L'INTÉGRATION SOUS LE SIGNE $\int$

51. La différentiation ou l'intégration sous le signe donnent le moyen de déduire, d'intégrales définies déjà connues, d'autres intégrales nouvelles. Voyons d'abord en quoi consistent ces procédés.

Soit l'intégrale définie

$$\int_a^b F(x) dx$$

que nous avons vu être représentée par l'aire comprise entre la courbe dont l'équation est $y = F(x)$, l'axe des x , et deux ordonnées fixes correspondantes aux valeurs $x = a$, $x = b$ de l'abscisse, intégrale qui a, par conséquent, une valeur constante déterminée. On peut supposer que la fonction $F(x)$, sous le signe $\int$, contienne une variable z , autre que celle x , à laquelle se rapporte l'intégration, et chercher alors, par rapport à z , la dérivée ou la différentielle de la nouvelle espèce de fonction $\int_a^b F(x, z) dx$ qui en résulte.

Supposons d'abord que les limites a et b de l'intégrale définie ne contiennent pas x , c'est-à-dire demeurent constantes; et soit

$$u = \int_a^b F(x, z) dx,$$

En donnant à z l'accroissement Δz , u prendra l'accroissement Δu , et l'on aura

$$u + \Delta u = \int_a^b F(x, z + \Delta z) dx,$$

d'où

$$\begin{aligned} \Delta u &= \int_a^b F(x, z + \Delta z) dx - \int_a^b F(x, z) dx, \\ &= \int_a^b [F(x, z + \Delta z) - F(x, z)] dx, \end{aligned}$$

et, en divisant par Δz ,

$$\frac{\Delta u}{\Delta z} = \int_a^b \frac{F(x, z + \Delta z) - F(x, z)}{\Delta z} dx;$$

à la limite, on aura donc

$$(1) \quad \frac{du}{dz} = \int_a^b \frac{dF(x, z)}{dz} dx.$$

Si maintenant a et b dépendent de z , c'est-à-dire sont des fonctions de z , on aura, en regardant u comme une fonction de a , b , z ,

$$du = \frac{du}{da} da + \frac{du}{db} db + \frac{du}{dz} dz.$$

Mais

$$\frac{du}{da} = -F(a, z), \quad \frac{du}{db} = F(b, z), \quad \frac{du}{dz} = \int_a^b \frac{dF(x, z)}{dz} dx.$$

Donc

$$(2) \quad du = F(b, z)db - F(a, z)da + dz \int_a^b \frac{dF(x, z)}{dz} dx.$$

52. On peut donner à ce résultat une interprétation géométrique fort élégante. Considérons, en effet, la courbe AM, fig. (5), dont l'équation en coordonnées rectangulaires est $y = F(x, z)$. La fonction $u = \int_a^b F(x, z) dx$ exprimera l'aire APQM comprise entre cette courbe, l'axe des x et deux ordonnées fixes correspondantes aux abscisses $OP = a$, $OQ = b$; et si l'on donne à la variable z un accroissement infiniment petit représenté par dz , a et b , qui sont des fonctions de z , prendrons des accroissements da , db , respectivement égaux à PP' , QQ' ; la courbe AM se transportera en EG, et l'on aura

$$u + du = \int_{a+da}^{b+db} F(x, z + dz) dx = P'FHQ',$$

et

$$du = P'FHQ' - PAMQ = (PEGQ - PAMQ) - PEF P' + QGHQ'.$$

Mais l'aire PEGQ est représentée par $\int_a^b F(x, z + dz) dx$;

celle PAMQ l'est par $\int_a^b F(x, z)dx$; et quant aux aires PEPF et QGHQ' que l'on peut remplacer par les rectangles PAMP' et QMNQ', en négligeant les quantités A'Ami et M'Mna infiniment petites du second ordre, elles le seront respectivement par $F(a, z)da$ et $F(b, z)db$, $F(a, z)$ et $F(b, z)$ étant les ordonnées correspondantes aux abscisses $OP = a$, $OQ = b$. On aura donc

$$du = \left[\int_a^b F(x, z + dz)dx - \int_a^b F(x, z)dx \right] - F(a, z)da + F(b, z)db,$$

et, par suite,

$$du = dz \int_a^b \frac{F(x, z)dx}{dz} - F(a, z)da + F(b, z)db.$$

53. Si l'intégrale de $F(x, z)dx$ était indéfinie par rapport à x , on mettrait cette intégrale sous la forme

$$u = \int_a^x F(x, z)dx + \psi(z),$$

$\psi(z)$ étant une fonction quelconque de z ; et différentiant alors par rapport à z , on aurait,

$$\frac{du}{dz} = \int_a^x \frac{dF(x, z)}{dz} dx + \psi'(z),$$

ou, parce que $\psi'(z)$ est une constante par rapport à x ,

$$\frac{du}{dz} = \int \frac{dF(x, z)}{dz} dx.$$

54. Passons maintenant à l'intégration sous le signe $\int$. Soit l'intégrale définie

$$\int_a^b F(x, y)dx$$

qui a lieu par rapport à x .

Si l'on multiplie cette intégrale par dy et que l'on intègre ensuite par rapport à y , on aura

$$\int dx \int_a^b F(x, y) dx,$$

et, entre deux limites ξ et ξ_1 de y ,

$$\int_{\xi}^{\xi_1} dy \int_a^b F(x, y) dx$$

55. On peut intervertir l'ordre dans lequel les deux intégrations ont été faites, c'est-à-dire que

$$\int_{\xi}^{\xi_1} dy \int_a^b F(x, y) dx = \int_a^b dx \int_{\xi}^{\xi_1} F(x, y) dy.$$

En effet, on a

$$\begin{aligned} \frac{d}{dy} \int_a^b \left[dx \int F(x, y) dy \right] &= \int_a^b dx \frac{d \int F(x, y) dy}{dy} \\ &= \int_a^b F(x, y) dx; \end{aligned}$$

et, par suite, en intégrant les deux membres par rapport à y , et entre les deux limites ξ , ξ_1 ,

$$\int_a^b dx \int_{\xi}^{\xi_1} F(x, y) dy = \int_{\xi}^{\xi_1} dy \int_a^b F(x, y) dx.$$

L'intégrale $\int_a^b dx \int_{\xi}^{\xi_1} F(x, y) dy$ ou celle $\int_{\xi}^{\xi_1} dy \int_a^b F(x, y) dx$ a une signification géométrique fort simple. Cette intégrale exprime en effet le volume compris entre la surface dont l'équation en coordonnées rectangulaires est $z = F(x, y)$, le plan des xy , et quatre plans parallèles deux à deux aux plans coordonnés yz , yx , répondant les premiers aux abscisses $x = a$, $x = b$, et les seconds à celles $y = \xi$, $y = \xi_1$.

56. APPLICATIONS. Soit, en premier lieu, l'intégrale

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2 + a} = \frac{\pi}{2} a^{-\frac{1}{2}}.$$

En différentiant n fois par rapport à a , on trouve

$$\int_0^{\infty} \frac{1.2.3\dots n}{(x^2 + a)^{n+1}} dx = \frac{1}{2} \frac{3}{2} \frac{5}{2} \dots \frac{2n-1}{2} \frac{1}{a^{n+\frac{1}{2}}} \frac{\pi}{2}.$$

Par suite, on a

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a)^{n+1}} = \frac{1.3.5\dots(2n-1)}{2.4.6\dots 2n} \cdot \frac{\pi}{2a^{n+\frac{1}{2}}}.$$

Soit encore

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} dx = \frac{1}{a}.$$

En différentiant cette équation $n-1$ fois de suite par rapport à a , on obtient

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} x^{n-1} dx = \frac{1.2.3\dots(n-1)}{a^n},$$

Si l'on désigne par $\Gamma(n)$ l'intégrale $\int_0^{\infty} e^{-x} x^{n-1} dx$, on aura, pour n entier et positif,

$$\Gamma(n) = 1.2.3\dots(n-1).$$

Par conséquent,

$$(a) \quad \int_0^{\infty} e^{-ax} x^{n-1} dx = \frac{\Gamma(n)}{a^n}.$$

Cette formule s'étend au cas où a est imaginaire et représenté par $a + b\sqrt{-1}$.

En effet, on a

$$\begin{aligned} \int e^{-(a+b\sqrt{-1})x} dx &= \frac{-e^{-(a+b\sqrt{-1})x}}{a+b\sqrt{-1}} + C \\ &= -\frac{e^{-ax}(\cos bx - \sqrt{-1} \sin bx)}{a+b\sqrt{-1}} + C; \end{aligned}$$

d'où

$$\int_0^{\infty} e^{-(a+b\sqrt{-1})x} dx = \frac{1}{a+b\sqrt{-1}};$$

et si l'on différencie maintenant cette expression $n-1$ fois par rapport à a , on obtiendra

$$\int_0^{\infty} e^{-(a+b\sqrt{-1})x} x^{n-1} dx = \frac{1.2.3\dots(n-1)}{(a+b\sqrt{-1})^n},$$

équation qui est celle (x), dans laquelle a se trouve remplacé par $a+b\sqrt{-1}$.

Si l'on pose dans cette formule

$$a+b\sqrt{-1} = \rho(\cos \theta + \sqrt{-1} \sin \theta);$$

d'où

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \cos \theta = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}, \quad \sin \theta = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}},$$

on obtient

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} (\cos bx - \sqrt{-1} \sin bx) x^{n-1} dx = \frac{\Gamma(n)}{\rho^n} (\cos n\theta - \sqrt{-1} \sin n\theta)$$

et de cette dernière on déduit :

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-ax} x^{n-1} \sin bx dx &= \frac{\Gamma(n) \sin n\theta}{\rho^n} \\ \int_0^{\infty} e^{-ax} x^{n-1} \cos bx dx &= \frac{\Gamma(n) \cos n\theta}{\rho^n} \end{aligned}$$

Soit maintenant

$$\int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx dx = \frac{a}{a^2 + b^2},$$

on en déduit, en intégrant par rapport à a ,

$$\int_0^a dx \int_0^{\infty} e^{-ax} \cos bx dx = \int_0^a \frac{ada}{a^2 + b^2}.$$

Mais en intervertissant l'ordre des intégrations, on a

$$\begin{aligned}\int_0^a da \int_0^\infty e^{-ax} \cos bx \, dx &= \int_0^\infty dx \int_0^a e^{-ax} \cos bx \, dx \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x} \cos bx \, dx,\end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$\int_0^a \frac{ada}{a^2 + b^2} = \frac{1}{2} l \frac{a^2 + b^2}{v^2 + b^2}.$$

Donc

$$\int_0^\infty \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x} \cos bx \, dx = \frac{1}{2} l \frac{a^2 + b^2}{v^2 + b^2}.$$

Si dans cette formule on fait $b = 0$, il vient

$$\int_0^\infty \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x} \, dx = l \frac{a}{v}.$$

On arriverait encore au même résultat, en intégrant par rapport à a , entre les limites v et a , les deux membres de l'équation

$$\int_0^\infty e^{-ax} \, dx = \frac{1}{a}.$$

Si l'on applique le même calcul à la formule

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx \, dx = \frac{b}{a^2 + b^2},$$

on obtient d'abord

$$\begin{aligned}\int_0^a da \int_0^\infty e^{-ax} \sin bx \, dx &= \int_0^a \frac{bda}{a^2 + b^2} \\ &= \arctan \frac{a}{b} - \arctan \frac{v}{b} = \arctan \frac{b(a - v)}{b^2 + av};\end{aligned}$$

et comme

$$\begin{aligned}\int_0^a da \int_0^\infty e^{-ax} \sin bx \, dx &= \int_0^\infty dx \int_0^a \sin bx e^{-ax} \, da \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-bx} - e^{-ax}}{x} \sin bx \, dx,\end{aligned}$$

il en résulte

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} \sin bx \, dx = \text{arc tang} \frac{b(a-b)}{b^2 + ab}.$$

Si dans cette dernière on fait $a = \infty$, $b = 0$, on obtient

$$(a) \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{x} \, dx = \frac{\pi}{2} \quad \text{ou} \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin bx}{x} \, dx = \pi.$$

Pour b négatif, il est évident que l'on aurait

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin bx}{x} \, dx = -\frac{\pi}{2}.$$

Si dans la formule qui précède on remplace successivement b par $a + b$ et par $a - b$, on aura, en supposant $a > b$,

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin (a+b)x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin (a-b)x}{x} \, dx = \frac{\pi}{2};$$

et ces équations combinées successivement par voie d'addition et de soustraction donneront

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x} \, dx = \frac{\pi}{2}, \quad \int_0^{\infty} \frac{\sin bx \cos ax}{x} \, dx = 0;$$

d'où :

$$(b) \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x} \, dx = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin ax \cos bx}{x} \, dx = 0,$$

suivant que $a > b$ ou $a < b$. Dans le cas où $a = b$, le premier membre de cette intégrale se réduit à

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin 2ax}{x} \, dx$$

et a pour valeur $\frac{1}{2}$ d'après la formule (a).

57. On peut faire servir les formules (b) à la détermination de l'intégrale $\int_0^\infty \frac{\cos ax dx}{1+x^2}$. En effet, si l'on multiplie les deux membres de l'équation

$$\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx dx = \frac{b}{a^2 + b^2}$$

par $\frac{\cos b db}{b}$ et qu'on intègre ensuite, par rapport à b , entre les limites $b = 0$ et $b = \infty$, on aura

$$\int_0^\infty e^{-ax} dx \int_0^\infty \frac{\sin bx \cos b}{b} db = \int_0^\infty \frac{\cos b db}{a^2 + b^2}.$$

Mais $\int_0^\infty \frac{\sin bx \cos b}{b} db = 0$ ou $\frac{\pi}{2}$ suivant que l'on a $x < 1$ ou $x > 1$. Donc

$$\frac{\pi}{2} \int_1^\infty e^{-ax} dx = \int_0^\infty \frac{\cos b db}{a^2 + b^2}.$$

D'ailleurs

$$\int_1^\infty e^{-ax} dx = \frac{1}{a} e^{-a}.$$

Donc enfin

$$\int_0^\infty \frac{a \cos b db}{a^2 + b^2} = \frac{\pi}{2} e^{-a},$$

ou, en remplaçant b par ax , a étant essentiellement positif,

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-a}.$$

DÉTERMINATION DES INTÉGRALES DÉFINIES PAR L'INTÉGRATION D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

58. Un autre procédé très-ingénieux pour la détermination d'intégrales définies, et auquel on doit de nombreux et beaux

exemples, consiste à former, entre l'intégrale proposée et quelques-unes des constantes que cette intégrale renferme, une équation différentielle que l'on puisse intégrer. L'exemple suivant, dû à Laplace, est très-propre à donner une idée de cette méthode.

Soit

$$u = \int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} \cos 2bx dx.$$

En différentiant par rapport à b , on trouve

$$\frac{du}{db} = - \int_0^{\infty} 2x e^{-a^2 x^2} \sin 2bx dx.$$

Mais en intégrant par parties, on a

$$\int 2x e^{-a^2 x^2} \sin 2bx dx = -\frac{1}{a^2} e^{-a^2 x^2} \sin 2bx + \frac{2b}{a^2} \int e^{-a^2 x^2} \cos 2bx dx;$$

d'où l'on déduit, en remarquant que le terme $-\frac{1}{a^2} e^{-a^2 x^2} \sin 2bx$ est nul aux deux limites $x = 0$ et $x = \infty$,

$$\frac{du}{db} = -\frac{2b}{u^2} u,$$

et, par suite,

$$u = C e^{-\frac{b^2}{a^2}}.$$

On a donc

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} \cos 2bx dx = C e^{-\frac{b^2}{a^2}}.$$

Pour déterminer la constante C , il suffit de faire $b = 0$; alors

$$C = \int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} dx = \frac{1}{a} \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}.$$

Donc enfin,

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} \cos 2bx dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{b^2}{a^2}}.$$

Soit encore l'intégrale

$$u = \int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx.$$

En prenant pour la limite supérieure $\frac{2K\pi}{a}$, K étant un nombre entier, et différentiant deux fois de suite par rapport a , on aura

$$\frac{du}{da} = - \int_0^{\frac{2K\pi}{a}} \frac{x \sin ax}{1+x^2} dx + \frac{2K\pi}{a^2 + 4K^2\pi^2},$$

$$\frac{d^2u}{da^2} = - \int_0^{\frac{2K\pi}{a}} \frac{x^2 \cos ax}{1+x^2} dx + \frac{4K\pi a}{(a^2 + 4K^2\pi^2)^2};$$

d'où

$$u - \frac{du^2}{da^2} = \int_0^{\frac{2K\pi}{a}} \cos ax dx - \frac{4K\pi a}{(a^2 + 4K^2\pi^2)^2},$$

ou parce que

$$\int_0^{\frac{2K\pi}{a}} \cos ax dx = 0$$

$$u - \frac{d^2u}{da^2} = - \frac{4K\pi a}{(a^2 + 4K^2\pi^2)^2}.$$

Maintenant, si l'on suppose que K soit infiniment grand, $\frac{4K\pi a}{(a^2 + 4K^2\pi^2)^2}$ sera infiniment petit, et l'on pourra poser :

$$u = \frac{d^2u}{da^2},$$

d'où

$$u = Ae^{-a} + B.e^a,$$

A et B désignant deux constantes; comme d'ailleurs on doit avoir $B = 0$, il en résulte

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx = Ae^{-a}.$$

Pour déterminer la constante A , il suffit de faire $a = 0$; alors

$$A = \int_0^{\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \frac{\pi}{2}.$$

Par conséquent,

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a}.$$

Si dans cette équation on remplace x par $\frac{x}{m}$ et a par ma , on aura

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{m^2+x^2} dx = \frac{\pi}{2m} e^{-ma};$$

d'où l'on tire, en différentiant par rapport à a ,

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{m^2+x^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-ma}.$$

Si l'on remplace dans la même équation x par mx , et a par $\frac{a}{m}$, il viendra

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{1+m^2x^2} dx = \frac{\pi}{2m} e^{-ma},$$

et si l'on suppose $m = 0$, on obtiendra

$$\int_0^{\infty} \cos ax dx = 0.$$

Si a était négatif, on trouverait de la même manière :

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{m^2+x^2} dx = \frac{\pi}{2m} e^{ma},$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin ax}{m^2+x^2} dx = -\frac{\pi}{2} e^{ma}.$$

59. On peut encore obtenir la valeur des deux intégrales

$$u = \int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} \sin^2 bx \, dx,$$

$$v = \int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} \cos^2 bx \, dx,$$

en combinant successivement ces intégrales par voie d'addition et de soustraction. En effet, on a

$$u + v = \int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} dx,$$

$$v - u = \int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} \cos 2bx \, dx;$$

et comme

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-a^2 x^2} \cos 2bx \, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{b^2}{a^2}},$$

il en résulte

$$u + v = \frac{\sqrt{\pi}}{2a}, \quad v - u = \frac{\sqrt{\pi}}{2a} e^{-\frac{b^2}{a^2}}.$$

Ainsi :

$$u = \frac{\sqrt{\pi}}{4a} \left(1 - e^{-\frac{b^2}{a^2}} \right),$$

$$v = \frac{\sqrt{\pi}}{4a} \left(1 + e^{-\frac{b^2}{a^2}} \right).$$

FORMULE DE CAUCHY.

60. Nous allons faire connaître maintenant une formule très-générale, due à Cauchy, et à laquelle se rattache la détermination d'un grand nombre d'intégrales définies.

Soit z une variable imaginaire dont ρ est le module et a l'argument. Désignons par $F(z)$ une fonction qui reste finie et continue ainsi que sa dérivée $F'(z)$ pour toute valeur de z dont le module ρ est inférieur à une certaine limite que nous désignerons par R . Supposons de plus que ρ restant constant, la fonction $F(z)$ reprenne, pour $a = \alpha + 2\pi$, la valeur qu'elle avait pour $a = \alpha$. On aura

$$z = \rho (\cos a + \sqrt{-1} \sin a) = \rho e^{a\sqrt{-1}},$$

et, en différentiant ensuite la fonction $F(z)$ par rapport à ρ , puis par rapport à a , il viendra

$$\begin{aligned} \frac{dF(z)}{d\rho} &= F'(z) \frac{dz}{d\rho} = F'(z) e^{a\sqrt{-1}}, \\ \frac{dF(z)}{da} &= F'(z) \frac{dz}{da} = F'(z) \rho e^{a\sqrt{-1}} \sqrt{-1}; \end{aligned}$$

par conséquent,

$$\frac{dF(z)}{d\rho} = \frac{1}{\rho \sqrt{-1}} \frac{dF(z)}{da}.$$

Les deux membres de cette équation ont chacun une valeur finie et déterminée pour toute valeur de z dont le module ρ est moindre que R , puisque, par hypothèse, $F(z)$ reste finie et continue pour les mêmes valeurs. Si donc, on multiplie ces deux membres par $d\rho da$, et qu'on intègre ensuite par rapport à ρ entre les limites 0 et ρ , et par rapport à a entre celles α et $\alpha + 2\pi$, on aura

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} da \int_0^{\rho} \frac{dF(z)}{d\rho} d\rho = \int_0^{\rho} \frac{d\rho}{\rho \sqrt{-1}} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \frac{dF(z)}{da} da,$$

ou parce que

$$\begin{aligned} \int_0^{\rho} \frac{dF(z)}{d\rho} d\rho &= F(z) - F(0), \\ \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} da [F(z) - F(0)] &= \int_0^{\rho} \frac{d\rho}{\rho \sqrt{-1}} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \frac{dF(z)}{da} da, \end{aligned}$$

On a d'ailleurs

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \frac{dF(z)}{da} da = F[\rho e^{(\alpha+2\pi)\sqrt{-1}}] - F(\rho e^{\alpha\sqrt{-1}}),$$

puisque

$$\int \frac{dF(z)}{da} da = F(z) = F(\rho e^{\alpha\sqrt{-1}});$$

et comme le second membre est nul, d'après l'hypothèse que nous avons admise, il en résulte

$$\int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \frac{dF(z)}{da} da = 0;$$

d'où

$$\int_0^{\rho} \frac{d\rho}{\rho\sqrt{-1}} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} \frac{dF(z)}{da} da = 0, \quad \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} da[F(z) - F(0)] = 0.$$

On a donc

$$F(0) \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} da = \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} F(z) da,$$

et, par conséquent,

$$(1) \quad F(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} F(z) da,$$

ou si l'on veut

$$F(0) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} F(\rho e^{\alpha\sqrt{-1}}) d\alpha.$$

Si dans cette formule, on fait $\alpha = 0$, il vient

$$(2) \quad F(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} F(\rho e^{\alpha\sqrt{-1}}) d\alpha;$$

et, si l'on fait ensuite $\alpha = -2\pi$, et que l'on change a en $-a$, on aura

$$F(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{-2\pi} F(\rho e^{\alpha\sqrt{-1}}) d\alpha.$$

Enfin si dans la même formule, on pose $F(z) = f(x+z)$, on aura $F(0) = f(x)$, et par suite,

$$(3) \quad f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{\alpha}^{\alpha+2\pi} f(x + \rho e^{i\sqrt{-1}}) d\alpha.$$

Ainsi, toute fonction $F(x)$ qui reste finie et continue, ainsi que sa dérivée première $F'(x)$, entre certaines limites, peut être représentée, entre ces limites, par une intégrale définie renfermant, sous son signe d'intégration, la même fonction $F(x)$.

61. Cauchy a déduit de la formule (1) un théorème très-remarquable que nous nous contenterons d'énoncer, en renvoyant pour sa démonstration aux ouvrages mêmes de ce grand géomètre.

Une fonction $F(x)$ d'une variable x , réelle ou imaginaire, sera développable en série convergente ordonnée suivant les puissances ascendantes de x , si le module de cette variable conserve une valeur inférieure à celle pour laquelle la fonction $F(x)$ ou sa dérivée cesse d'être finie et continue.

Ce théorème, comme on le voit, fait connaître immédiatement les règles de convergence des séries fournies par le développement des fonctions; et si on l'applique, par exemple, à celles

$$\sin x, \cos x, e^x, e^{x^2}, \cos(1-x^2)$$

qui ne cessent pas d'être finies et continues, ainsi que leurs dérivées premières, on reconnaît que ces fonctions sont toujours développables en séries convergentes, ordonnées suivant les puissances ascendantes de x . Au contraire, les fonctions

$$(1+x)^{\frac{1}{2}}, \frac{1}{1-x}, \frac{x}{1+\sqrt{1-x^2}}, l(1+x), \text{arc tang } x$$

et leurs dérivées premières, étant des fonctions de x qui cessent d'être continues lorsque le module de cette variable devient égal à l'unité, ces fonctions ne seront développables

en séries convergentes ordonnées suivant les puissances ascendantes et entières de x , que si ce module est inférieur à l'unité. Elles pourront devenir et deviendront, en effet, divergentes, si le module de x surpasse l'unité.

Enfin, comme les fonctions

$$lx, e^{\frac{1}{x}}, e^{x^2}, \cos \frac{1}{x^2}$$

deviennent discontinues avec leurs dérivées premières pour la valeur $x = 0$, et, par conséquent, lorsque le module de x est le plus petit possible, on voit que ces fonctions ne seront jamais développables en séries convergentes ordonnées suivant les puissances entières et ascendantes de x .

APPLICATIONS.

62. Soit d'abord

$$(1) \quad F(z) = \frac{1}{1-z}.$$

Pour toute valeur de ρ moindre que l'unité cette fonction et sa dérivée restent finies et continues. En appliquant la formule (2), on a donc

$$\begin{aligned} F(0) = 1 &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{da}{1-z} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{da}{1-\rho e^{ia}\sqrt{-1}} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{da}{1-\rho \cos a - \sqrt{-1} \rho \sin a} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{(1-\rho \cos a + \sqrt{-1} \rho \sin a) da}{1-2\rho \cos a + \rho^2}. \end{aligned}$$

On déduit de là

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1-\rho \cos a + \sqrt{-1} \rho \sin a)}{1-2\rho \cos a + \rho^2} da = 2\pi,$$

et, en séparant les quantités réelles des quantités imaginaires,

$$\int_0^{2\pi} \frac{(1 - \rho \cos a) da}{1 - 2\rho \cos a + \rho^2} = 2\pi, \quad \int_0^{2\pi} \frac{\rho \sin a da}{1 - 2\rho \cos a + \rho^2} = 0.$$

Soit encore

$$(2) \quad F(z) = l(1 - z).$$

On aura $F'(z) = \frac{l}{1 - z}$, et la fonction ainsi que sa dérivée seront continues pour toute valeur de ρ moindre que l'unité. Cette fonction satisfera d'ailleurs à la condition de reprendre pour $a = \alpha + 2\pi$ la valeur qu'elle avait pour $a = \alpha$; et en posant

$$(a) \quad z = \rho(\cos a + \sqrt{-1} \sin a),$$

$$1 - z = r(\cos \theta + \sqrt{-1} \sin \theta) = re^{\theta\sqrt{-1}},$$

d'où

$$l(1 - z) = lr + \theta\sqrt{-1}$$

on aura, par la formule (2), du n° (60),

$$(b) \quad 0 = \int_0^{2\pi} (lr + \theta\sqrt{-1}).$$

Mais en comparant les deux équations (a), on en déduit

$$r \cos \theta = 1 - \rho \cos a, \quad r \sin \theta = -\rho \sin a$$

$$\rho = \sqrt{1 - 2\rho \cos a + \rho^2},$$

$$\cos \theta = \frac{1 - \rho \cos a}{\sqrt{1 - 2\rho \cos a + \rho^2}},$$

$$\sin \theta = \frac{-\rho \sin a}{\sqrt{1 - 2\rho \cos a + \rho^2}},$$

$$\tan \theta = \frac{-\rho \sin a}{1 - \rho \cos a}.$$

On peut donc décomposer l'intégrale (1) dans les deux suivantes :

$$\int_0^{2\pi} l(\sqrt{1-2\rho \cos a + \rho^2}) da = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \text{arc tang} \frac{-\rho \sin a}{1-\rho \cos a} da = 0.$$

Soit enfin

$$(3) \quad F(z) = e^{nz}.$$

On a, quel que soit ρ ,

$$\begin{aligned} F(0) &= 1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{as} da = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{n\rho \cos s} = \sqrt{-1} \, n\rho \sin s \, da \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{b \cos s} [\cos(b \sin a) + \sqrt{-1} \sin(b \sin a)] da, \end{aligned}$$

en posant $n\rho = b$; d'où

$$\int_0^{2\pi} e^{b \cos s} [\cos(b \sin a) + \sqrt{-1} \sin(b \sin a)] dx = 2\pi.$$

En séparant les quantités réelles de celles imaginaires, on a donc

$$\int_0^{2\pi} e^{b \cos a} \cos(b \sin a) dx = 2\pi,$$

$$\int_0^{2\pi} e^{b \cos a} \sin(b \sin a) da = 0.$$

AUTRES PROCÉDÉS POUR LA DÉTERMINATION D'INTÉGRALES DÉFINIES.

63. La considération des intégrales doubles peut encore conduire à la détermination de certaines intégrales définies. En voici un exemple fort remarquable.

Si dans l'intégrale

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx,$$

on change x en y , on obtiendra celle identique

$$\int_0^{\infty} e^{-y^2} dy;$$

et, si l'on multiplie l'une par l'autre ces deux intégrales, on aura

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2} dy dx.$$

Cela posé, si l'on fait $y = xt$, t désignant une nouvelle variable, on aura $dy = xdt$; et, par suite l'expression précédente deviendra

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} x e^{-x^2(1+t^2)} dx dt, \quad \text{ou} \quad \int_0^{\infty} dt \int_0^{\infty} x e^{-x^2(1+t^2)} dx.$$

Or

$$\int_0^{\infty} x e^{-x^2(1+t^2)} dx = \frac{1}{2(1+t^2)},$$

et

$$\int_0^{\infty} \frac{1}{2(1+t^2)} dt = \frac{1}{2} (\text{arc tang } \infty - \text{arc tang } 0) = \frac{\pi}{4}.$$

Donc, en extrayant la racine carrée,

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

ou

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

Si l'on remplace dans cette intégrale x par $x\sqrt{a}$, a désignant une quantité positive, on aura

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}.$$

En différentiant cette dernière équation n fois de suite par rapport à a , on trouve

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} x^{2n} dx = \sqrt{\pi} \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2^n} a^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)},$$

et, en faisant $a = 1$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} x^{2n} dx = \sqrt{\pi} \frac{1.3.5 \dots (2n-1)}{2^n}.$$

64. On parvient encore à déterminer l'intégrale $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$, au moyen d'un procédé très-remarquable dû à Poisson. •

Concevons en effet trois axes rectangulaires Ox , Oy , Oz , et soit $z = e^{-x^2}$ l'équation d'une courbe située dans le plan des xz . Cette courbe engendrera, par sa révolution autour de l'axe des z , une surface dont l'équation sera $z = e^{-x^2-y^2}$, et le produit $\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2} dy dx$, représentera le quart du volume du solide compris entre cette surface et le plan des xy . Si l'on décompose ce volume en une infinité de tranches cylindriques, au moyen de surfaces cylindriques infiniment voisines ayant pour axe commun l'axe Oz , la partie du volume compris entre deux surfaces ayant r et $r + dr$ pour rayons, ou la tranche terminée à ces surfaces, sera égale à la surface de la base $2\pi r dr$ multipliée par la hauteur z ou e^{-x^2} , c'est-à-dire à $2\pi r e^{-r^2} dr$; et en prenant l'intégrale de cet élément entre les limites 0 et ∞ , on aura pour le volume entier du solide,

$$\int_0^{\infty} 2\pi r e^{-r^2} dr = \pi.$$

Mais ce volume est égal à quatre fois le produit $\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-x^2-y^2} dy dx$ qui est le carré de l'intégrale proposée $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$; donc

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

comme on l'a déjà trouvé.

65. Le passage des quantités réelles aux quantités imaginaires peut encore conduire à de nouvelles intégrales.

Considérons, par exemple, celle

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}.$$

En changeant dans cette intégrale x en $x + \alpha$, on en déduit

$$\begin{aligned} \sqrt{\pi} &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+\alpha)^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-(x+\alpha)^2} dx + \int_0^{\infty} e^{-(x-\alpha)^2} dx \\ &= e^{-\alpha^2} \int_0^{\infty} e^{-x^2} (e^{2\alpha x} + e^{-2\alpha x}) dx; \end{aligned}$$

d'où

$$(1) \quad \int_0^{\infty} e^{-x^2} (e^{2\alpha x} + e^{-2\alpha x}) dx = e^{\alpha^2} \sqrt{\pi}.$$

Posons $\alpha = a \sqrt{-1}$: par cette valeur l'équation (1) ne sera pas changée; car les deux membres pouvant être développés suivant les puissances entières et ascendantes de α , les coefficients des mêmes puissances de a seront les mêmes dans les deux membres, en sorte que cette équation subsistera quand on y remplacera α par l'expression imaginaire $a \sqrt{-1}$. Si donc, on observe que

$$e^{2\alpha x} + e^{-2\alpha x} = 2 \cos 2\alpha x,$$

on aura

$$(2) \quad \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2\alpha x dx = \frac{1}{2} e^{-\alpha^2} \sqrt{\pi}.$$

En changeant dans cette intégrale x en mx et am en n , on a

$$(3) \quad \int_0^{\infty} e^{-m^2 x^2} \cos 2 n x dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2m} e^{-\frac{n^2}{m^2}}.$$

66. On arrive au même résultat en opérant directement sur l'intégrale (2). En effet, on a

$$\cos 2ax = \frac{1}{2}e^{2ax\sqrt{-1}} + \frac{1}{2}e^{-2ax\sqrt{-1}},$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos 2ax dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \frac{1}{2} e^{2ax\sqrt{-1}} dx + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \frac{1}{2} e^{-2ax\sqrt{-1}} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 + 2ax\sqrt{-1}} dx + \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 - 2ax\sqrt{-1}} dx; \end{aligned}$$

multipliant par e^{-a^2} , on a d'ailleurs

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos 2ax dx \\ &= \frac{1}{2} e^{-a^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x-a\sqrt{-1})^2} dx + \frac{1}{2} e^{-a^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+a\sqrt{-1})^2} dx; \end{aligned}$$

et comme

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-(x+a)^2} dx = \sqrt{\pi},$$

il en résulte, en faisant $\alpha = a\sqrt{-1}$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \cos 2ax dx = e^{-a^2} \sqrt{\pi}.$$

Donc

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos 2ax dx = \frac{1}{2} e^{-a^2} \sqrt{\pi}.$$

67. Nous terminerons ce que nous avons à dire sur la détermination des intégrales définies par l'évaluation de celle

$$\int_0^{\pi} \log(1 - 2a \cos x + a^2) dx,$$

dont la valeur a été donnée d'abord par Poisson dans le XVII^e cahier du *Journal de l'École polytechnique*, et ensuite par M. Delaunay, dans le *Journal de Mathématiques pures et appliquées*.

En appelant u cette intégrale, on a

$$u = \lim \frac{\pi}{n} \left[\log \left(a^2 - 2a \cos \frac{1}{n} \pi + 1 \right) + \log \left(a^2 - 2a \cos \frac{2}{n} \pi + 1 \right) \dots \right. \\ \left. + \log \left(a^2 - 2a \cos \frac{n-1}{n} \pi + 1 \right) \right],$$

limite que l'on peut écrire ainsi :

$$u = \lim \frac{\pi}{n} \log \left[\left(a^2 - 2a \cos \frac{1}{n} \pi + 1 \right) \left(a^2 - 2a \cos \frac{2}{n} \pi + 1 \right) \dots \right. \\ \left. \times \left(a^2 - 2a \cos \frac{n-1}{n} \pi + 1 \right) \right].$$

On a d'ailleurs, par le théorème de Côtes,

$$\frac{a^{2n} - 1}{a^2 - 1} = \left(a^2 - 2a \cos \frac{1}{n} \pi + 1 \right) \left(a^2 - 2a \cos \frac{2}{n} \pi + 1 \right) \dots \\ \times \left(a^2 - 2a \cos \frac{n-1}{n} \pi + 1 \right).$$

Donc

$$u = \lim \left[\frac{\pi}{n} \log \frac{a^{2n} - 1}{a^2 - 1} \right].$$

Maintenant si l'on suppose $a < 1$, on aura

$$\lim \left[\frac{\pi}{n} \log \frac{a^{2n} - 1}{a^2 - 1} \right] = 0,$$

et, par suite,

$$\int_0^\pi \log (1 - 2a \cos x + a^2) dx = 0.$$

Si $a > 1$, on aura

$$\lim \left[\frac{\pi}{n} \log \frac{a^{2n} - 1}{a^2 - 1} \right] = \pi \log (a^2).$$

et, par suite,

$$\int_0^\pi \log(1 - 2a \cos x + a^2) dx = \pi \log(a^2).$$

**DÉMONSTRATION DE LA SÉRIE DE TAYLOR PAR LA CONSIDÉRATION
DES INTÉGRALES DÉFINIES.**

68. Soit $F(x)$ une fonction qui reste finie et continue ainsi que ses n premières dérivées, entre les valeurs x et $x + h$ de la variable. On a, d'après ce qui a été dit au n° (5),

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} F'(x) dx,$$

$F'(x)$ désignant la dérivée de $F(x)$; et si l'on remplace dans l'intégrale du second membre, x par $x + h - z$, z désignant une nouvelle variable, il viendra

$$F(x+h) - F(x) = \int_0^h F'(x+h-z) dz,$$

Cela posé, appliquons à cette dernière formule l'intégration par parties. On aura

$$\int_0^h F'(x+h-z) dz = z F'(x+h-z) + \int_0^h z F''(x+h-z) dz,$$

$$\int_0^h F''(x+h-z) dz = \frac{z^2}{1.2} F''(x+h-z) + \int_0^h \frac{z^2}{1.2} F'''(x+h-z) dz,$$

$$\int_0^h F'''(x+h-z) dz = \frac{z^3}{1.2.3} F'''(x+h-z) + \int_0^h \frac{z^3}{1.2.3} F^{(4)}(x+h-z) dz;$$

et, si l'on substitue chaque intégrale dans celle qui la précède, après y avoir fait $z = h$, il viendra

$$\begin{aligned}
 F(z+h) = & F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{1.2} F''(x) + \frac{h^3}{1.2.3} F'''(x) + \dots \\
 & + \frac{h^{n-1}}{1.2.3\dots(n-1)} F^{n-1}(x) + \frac{1}{1.2.3(n-1)} \int_0^h z^{n-1} F^n(x+h-z) dz.
 \end{aligned}$$

Maintenant soient M et m la plus petite et la plus grande valeur que prend la fonction $F^n(x+h-z)$ de $z=0$ à $z=h$. On aura, en désignant par R le reste de la série qui est :

$$R = \frac{1}{1.2.3(n-1)} \int_0^h z^{n-1} F^n(x+h-z) dz,$$

$$R < \frac{1}{1.2\dots(n-1)} \int_0^h z^{n-1} M dz, \text{ et } R > \frac{1}{1.2\dots(n-1)} \int_0^h z^{n-1} m dz;$$

c'est-à-dire

$$R < \frac{Mh^n}{1.2\dots n}, \quad R > \frac{mh^n}{1.2\dots n}.$$

En désignant par θ une quantité positive moindre que l'unité, on aura donc

$$R = \frac{h^n}{1.2\dots n} F^n(x+\theta h);$$

c'est l'expression du reste donnée n° (70).

CHAPITRE IX.

DES INTÉGRALES EULÉRIENNES.

DÉFINITIONS ET PROPRIÉTÉS DES INTÉGRALES EULÉRIENNES DE PREMIÈRE ET DE SECONDE ESPÈCE.

69. Legendre a désigné sous le nom d'*intégrales eulériennes*, les deux intégrales définies

$$\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx, \quad \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1}dx,$$

que l'on rencontre fréquemment dans les applications et dont Euler s'est le premier occupé : p, q, n y désignent des nombres positifs quelconques ; e est la base des logarithmes népériens.

La première de ces intégrales qui est une fonction de p et de q , se représente, d'après Binet, par la notation $B(p, q)$, et se désigne sous le nom d'*intégrale eulérienne de première espèce*. La deuxième dépend du seul paramètre n ; on la représente, avec Legendre, par le symbole $\Gamma(n)$, et on la nomme *intégrale eulérienne de seconde espèce*. D'après ces définitions, on a donc

$$(1) \quad B(p, q) = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}dx.$$

$$(2) \quad \Gamma(n) = \int_0^\infty e^{-x} x^{n-1}dx.$$

70. Les intégrales $B(p, q)$ et $\Gamma(n)$ peuvent être mises sous une autre forme qu'il est bon de connaître.

Si, dans la première, on pose

$$x = \frac{y}{1+y};$$

d'où

$$1-x = \frac{1}{1+y}, \quad dx = \frac{dy}{(1+y)^2},$$

on a

$$B(p, q) = \int_0^1 \frac{x^{p-1}}{(1+x)^{p+q}} dx;$$

et si dans la seconde, on fait $e^{-x} = y$ ou $x = y^2$, il vient

$$(3) \quad \Gamma(n) = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{n-1} dy \quad \text{ou} \quad \Gamma(n) = 2 \int_0^1 e^{-y^2} y^{2n-1} dy.$$

71. La fonction $B(p, q)$ est une fonction symétrique des quantités p et q . En effet, si l'on change dans la formule (1), x en $1-x$, $B(p, q)$ se transforme immédiatement en $B(q, p)$, et l'on a

$$(4) \quad B(p, q) = B(q, p).$$

72. On ramène l'intégrale $\Gamma(n+1)$ à celle $\Gamma(n)$. En effet, en intégrant par parties cette dernière, on a

$$\int e^{-x} x^{n-1} dx = \frac{e^{-x} x^n}{n} + \frac{1}{n} \int e^{-x} x^n dx,$$

et, entre les limites $x = 0$, $x = \infty$,

$$\int_0^\infty e^{-x} x^{n-1} dx = \frac{1}{n} \int_0^\infty e^{-x} x^n dx.$$

On a donc

$$\Gamma(n) = \frac{\Gamma(n+1)}{n},$$

et, par conséquent,

$$(5) \quad \Gamma(n+1) = n \Gamma(n).$$

Cette formule donne le moyen de calculer $\Gamma(n)$ quel que soit l'indice n , pourvu que cette fonction soit connue pour toutes les valeurs de n comprises entre 0 et 1. Ainsi, l'on a successivement

$$\begin{aligned}\Gamma(2) &= \Gamma(1), \\ \Gamma(3) &= 2\Gamma(2) = 2.1.\Gamma(1), \\ \Gamma(4) &= 3\Gamma(3) = 3.2.1.\Gamma(1), \\ &\dots\dots\dots \\ \Gamma(n) &= (n-1).....2.1.\Gamma(1).\end{aligned}$$

Mais

$$\Gamma(1) = \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1.$$

Donc

$$\Gamma(n) = 1.2.3.....(n-1).$$

On a de même

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \\ \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) &= \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{2} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right), \\ &\dots\dots\dots \\ \Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) &= \frac{2n-1}{2} \frac{2n-3}{2} \dots\dots \frac{3}{2} \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

Or

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \sqrt{\pi}.$$

Donc

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{2n-1}{2} \cdot \frac{2n-3}{2} \dots\dots \frac{3}{2} \frac{1}{2} \sqrt{\pi}.$$

73. On peut encore calculer $\Gamma(n)$ lorsque cette fonction est connue seulement pour toutes les valeurs de n comprises entre 0 et $\frac{1}{2}$. En effet, on a, d'après la formule (a) du n° (56),

$$\int_0^{\infty} z^{m-1} e^{-z(1+x)} dz = \frac{\Gamma(m)}{(1+x)^m},$$

ou

$$\frac{x^{n-1}}{(1+x)^n} = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-zx} z^{n-1} e^{-x} dz;$$

et, si l'on multiplie les deux membres de cette équation par dx , et qu'on intègre ensuite, par rapport à x , entre les limites 0 et ∞ , on obtiendra

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(1+x)^m} dx = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} z^{m-1} e^{-z} x^{n-1} e^{-xz} dx dz,$$

ou parce que

$$\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-xz} dx = \frac{\Gamma(n)}{z^n}$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(1+x)^m} dx = \frac{1}{\Gamma(m)} \int_0^{\infty} z^{m-1} e^{-z} dz \frac{\Gamma(n)}{z^n} = \frac{\Gamma(n)}{\Gamma(m)} \int_0^{\infty} z^{m-n-1} e^{-z} dz.$$

Mais

$$\int_0^{\infty} z^{m-n-1} e^{-z} dz = \Gamma(m-n);$$

donc

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(1+x)^m} dx = \frac{\Gamma(n) \Gamma(m-n)}{\Gamma(m)}.$$

Si on fait dans cette formule $m = 1$, et que l'on ait égard à ce que

$$\Gamma(1) = 1 \quad \text{et} \quad \int_0^{\infty} \frac{x^{n-1}}{1+x} = \frac{\pi}{\sin n\pi},$$

on aura

$$(6) \quad \Gamma(n) \Gamma(1-n) = \frac{\pi}{\sin n\pi}.$$

Ainsi, $\Gamma(n)$ étant connue pour toutes les valeurs de n comprises entre 0 et $\frac{1}{2}$, on connaîtra, par le moyen de cette formule, les valeurs de $\Gamma(n)$, depuis $n = \frac{1}{2}$, jusqu'à $n = 1$. On aura, par suite, les valeurs de cette fonction depuis $n = 1$ jusqu'à $n = \frac{3}{2}$; et ainsi de suite indéfiniment.

Si dans la formule (6) on suppose $m = \frac{1}{2}$, on trouve

$$\left[\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \right]^2 = \pi, \quad \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} = \int_0^{\infty} z^{-\frac{1}{2}} e^{-z} dz = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

C'est le résultat obtenu au n° (63).

EXPRESSION DE L'INTÉGRALE DE PREMIÈRE ESPÈCE B (p, q)
EN FONCTIONS Γ .

74. On peut exprimer l'intégrale de première espèce B (p, q) au moyen de fonctions Γ , ce qui est très-important. La formule qui sert de base à cette transformation a été donnée par Euler. La démonstration suivante, due à Poisson, est très-remarquable par les considérations qu'elle emprunte à la géométrie.

Si dans l'intégrale $\Gamma(p)$, on pose $x = y^2$, on a

$$\Gamma(p) = 2 \int_0^{\infty} e^{-y^2} y^{2p-1} dy,$$

et de même

$$\Gamma(q) = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} x^{2q-1} dx;$$

et, si l'on multiplie ces deux équations l'une par l'autre, il vient

$$\Gamma(p) \Gamma(q) = 4 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} x^{2q-1} y^{2p-1} dy dx.$$

Cette intégrale double représente le volume compris entre la surface dont l'équation est

$$z = e^{-(x^2+y^2)} x^{2q-1} y^{2p-1},$$

et les plans coordonnés; et si l'on remplace les coordonnées rectangulaires x, y par celles polaires r et θ , l'expression de ce volume sera

$$\Gamma(p) \Gamma(q) = 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} \theta \cos^{2q-1} \theta d\theta \cdot 2 \int_0^{\infty} e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} dr.$$

Or, cette intégrale est le produit de deux facteurs dont l'un $2 \int_0^\infty e^{-r^2} r^{2(p+q)-1} dr$ est égal à $\Gamma(p+q)$, d'après le n° (69), et dont l'autre $2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1} \theta \cos^{2q-1} \theta d\theta$ se réduit à $\int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{q-1} dx = B(p, q)$ quand on pose $\sin^2 \theta = x$. On a donc

$$\Gamma(p) \Gamma(q) = \Gamma(p+q) B(p, q),$$

et, par conséquent,

$$(7) \quad B(p, q) = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

75. Si dans l'expression de $B(p, q)$, donnée par la formule (1), on suppose $x = \frac{\zeta}{\mu}$, on aura, eu égard à la précédente,

$$\int_0^\mu \frac{\zeta^{p-1} (\mu-\zeta)^{q-1}}{\mu^{p+q-1}} \cdot \frac{d\zeta}{\mu} = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

et, de cette relation on déduit,

$$(8) \quad \int_0^\mu \zeta^{p-1} (\mu-\zeta)^{q-1} d\zeta = \mu^{p+q-1} \frac{\Gamma(p) \Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}.$$

76. La formule (7) va nous servir à exprimer une autre propriété très-générale des fonctions Γ . Si dans l'intégrale $B(p, q)$ on suppose $p = q$, on aura par la formule (1)

$$B(p, p) = \int_0^1 x^{p-1} (1-x)^{p-1} dx.$$

Posons

$$x = \frac{1}{2} (1+y);$$

par cette valeur l'équation précédente deviendra

$$B(p, p) = \frac{1}{2^{2p-1}} \int_{-1}^{+1} (1-y^2)^{p-1} dy,$$

ou

$$B(p, p) = \frac{1}{2^{2p-1}} \int_0^1 (1-y^2)^{p-1} dy;$$

et si l'on fait ensuite $y^2 = z$; d'où $dy = \frac{dz}{2z^{\frac{1}{2}}}$, on aura

$$B(p, p) = \frac{1}{2^{2p-1}} \int_0^1 z^{-\frac{1}{2}} (1-z)^{p-1} dz;$$

c'est-à-dire

$$B(p, p) = \frac{1}{2^{2p-1}} B\left(\frac{1}{2}, p\right).$$

Maintenant si on remplace les fonctions B par leurs valeurs en fonctions Γ , d'après la formule (7), il viendra

$$\frac{\Gamma(p) \Gamma(p)}{\Gamma(2p)} = \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \Gamma(p)}{2^{2p-1} \Gamma\left(\frac{1}{2} + p\right)}.$$

et, si l'on se rappelle que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$,

$$(9) \quad \Gamma(p) \Gamma\left(p + \frac{1}{2}\right) = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{2^{2p-1}} \Gamma(2p),$$

ce qui est la propriété annoncée.

CHAPITRE X.

RÉDUCTION DES INTÉGRALES MULTIPLES.

RÉDUCTION PAR UN CHANGEMENT DE COORDONNÉES. — FORMULE GÉNÉRALE POUR LE CHANGEMENT DE VARIABLES.

77. Une première méthode pour la réduction des intégrales multiples consiste dans un changement de variables. On peut, en effet, en substituant aux coordonnées anciennes d'autres coordonnées nouvelles, parvenir à des expressions transformées plus facilement intégrables. Mais avant d'entrer dans les détails de cette réduction, nous allons établir la formule générale qui sert au changement de variables dans les intégrales, et à laquelle ce calcul se trouve intimement lié.

Considérons donc l'intégrale multiple d'ordre n

$$(1) \quad \zeta = \int \int \int \dots \int U \, dx \, dy \, dz \dots dt,$$

dans laquelle U désigne une fonction réelle et continue des n variables $x, y, z \dots t$, et supposons qu'à ces n variables, on veuille substituer les n variables nouvelles $u, v, w \dots s$, liées aux premières par les n équations données :

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = F_0(u, v, w \dots s), \\ y = F_1(u, v, w \dots s), \\ z = F_2(u, v, w \dots s), \\ \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ t = F_{n-1}(u, v, w \dots s). \end{array} \right.$$

Admettons que dans ζ , on intègre d'abord par rapport à x ;

et telle sera l'expression qui, dans ζ , devra remplacer la différentielle dx .

Supposons, en second lieu, qu'après avoir intégré par rapport à x , on veuille encore intégrer par rapport à y ; il faudra alors, dans les équations (2), considérer $z \dots t$ comme constants et faire varier y avec $v, w \dots s$; et, en différentiant, on trouvera

$$dy = \frac{dy}{dv} dv + \frac{dy}{dw} dw + \dots + \frac{dy}{ds} ds,$$

$$0 = \frac{dz}{dv} dv + \frac{dz}{dw} dw + \dots + \frac{dz}{ds} ds,$$

$$0 = \frac{dt}{dv} dv + \frac{dt}{dw} dw + \dots + \frac{dt}{ds} ds;$$

d'où l'on déduira

$$dy = \frac{\sum \left(\pm \frac{dy}{dv} \frac{dz}{dw} \dots \frac{dt}{ds} \right)}{\sum \left(\pm \frac{dt}{dw} \dots \frac{dt}{ds} \right)} dv.$$

Cette expression sera celle qui, dans ζ , devra être mise à la place de dy , lorsqu'on substitue v à y .

En continuant de la sorte, on verrait que les expressions qui doivent remplacer $dz \dots dt$, lorsqu'on substitue w à $z \dots$, et finalement s à t , sont respectivement :

$$\frac{\sum \left(\pm \frac{dz}{dw} \dots \frac{dt}{ds} \right)}{\sum \left(\pm \dots \frac{dt}{ds} \right)} dw$$

.....

$$\frac{dt}{ds} ds.$$

Maintenant, si dans l'intégrale ζ on fait les substitutions indiquées, le produit de tous les multiplicateurs de $du, dv, dw, \dots ds$ sera précisément égal à la somme alternée (4); et.

en désignant par Δ cette somme, on trouvera pour la formule de transformation cherchée

$$(5) \quad \zeta = \int \int \int \dots \int (\pm \Delta) U \, du \, dv \, dw \dots ds.$$

Pour les cas de $n = 2$, $n = 3$, par exemple, cette formule donne

$$\begin{aligned} \zeta &= \int \int \pm \left(\frac{dx}{du} \frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv} \frac{dy}{du} \right) U \, du \, dv, \\ \zeta &= \int \int \int \pm \left(\frac{dx}{du} \frac{dy}{dv} - \frac{dx}{dv} \frac{dy}{du} \right) \frac{dz}{dw} + \left(\frac{dy}{du} \frac{dz}{dv} - \frac{dy}{dv} \frac{dz}{du} \right) \frac{dx}{dw} \\ &\quad + \left(\frac{dz}{du} \frac{dx}{dv} - \frac{dz}{dv} \frac{dx}{du} \right) \frac{dy}{dw} U \, du \, dv \, dw. \end{aligned}$$

SYSTÈME DE COORDONNÉES POLAIRES.

78. Considérons, en premier lieu, l'intégrale triple

$$\zeta = \int \int \int dx \, dy \, dz$$

à laquelle se rapporte; comme nous le verrons bientôt, l'évaluation des volumes en coordonnées rectangulaires, et supposons qu'aux coordonnées x, y, z , on veuille substituer celles polaires r, θ, ψ , liées, comme on sait, aux premières, par les relations :

$$x = r \sin \theta \cos \psi, \quad y = r \sin \theta \sin \psi, \quad z = r \cos \theta.$$

Par la formule générale (5), on aura

$$\begin{aligned} \zeta &= \int \int \int \left(\frac{dx}{dr} \frac{dy}{d\theta} - \frac{dx}{d\theta} \frac{dy}{dr} \right) \frac{dz}{d\psi} + \left(\frac{dy}{dr} \frac{dz}{d\theta} - \frac{dy}{d\theta} \frac{dz}{dr} \right) \frac{dx}{d\psi} \\ &\quad + \left(\frac{dz}{dr} \frac{dx}{d\theta} - \frac{dz}{d\theta} \frac{dx}{dr} \right) \frac{dy}{d\psi} dr \, d\theta \, d\psi; \end{aligned}$$

et il s'agira de calculer les dérivées de x , y et z , par rapport à r , θ , ψ .

Or, en différentiant, on trouve

$$\frac{dx}{dr} = \sin \theta \cos \psi, \quad \frac{dy}{dr} = \sin \theta \sin \psi, \quad \frac{dz}{dr} = \cos \theta,$$

$$\frac{dx}{d\theta} = r \cos \theta \cos \psi, \quad \frac{dy}{d\theta} = r \cos \theta \sin \psi, \quad \frac{dz}{d\theta} = -r \sin \theta,$$

$$\frac{dx}{d\psi} = -r \sin \theta \sin \psi, \quad \frac{dy}{d\psi} = r \sin \theta \cos \psi, \quad \frac{dz}{d\psi} = 0,$$

ce qui donne

$$\Delta = r^2 \sin \theta.$$

Pour l'expression de ζ , on a donc

$$\zeta = \iiint r^2 \sin \theta \, dr d\theta d\psi,$$

et, en intégrant entre les limites 0 et r ,

$$(1) \quad \zeta = \frac{1}{3} \int \int r^3 \sin \theta d\theta d\psi.$$

79. Considérons, en second lieu, l'intégrale double

$$\zeta = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \, dx dy,$$

de laquelle dépend la détermination des aires des surfaces courbes en coordonnées rectangulaires, et, supposons qu'aux variables x et y , on substitue les variables nouvelles θ , ψ . On aura

$$\zeta = \iint \pm \left(\frac{dx}{d\theta} \frac{dy}{d\psi} - \frac{dx}{d\psi} \frac{dy}{d\theta} \right) \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} \, d\theta d\psi,$$

et il restera à déterminer $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ en fonction de θ et de ψ .

Or, z étant fonction de x et de y , sera, par rapport à θ et ψ , une fonction de fonction, et l'on aura

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{dz}{dx} \frac{dx}{d\theta} + \frac{dz}{dy} \frac{dy}{d\theta},$$

$$\frac{dz}{d\psi} = \frac{dz}{dx} \frac{dx}{d\psi} + \frac{dz}{dy} \frac{dy}{d\psi};$$

d'où

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\frac{dz}{d\theta} \frac{dy}{d\psi} - \frac{dz}{d\psi} \frac{dy}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta} \frac{dy}{d\psi} - \frac{dx}{d\psi} \frac{dy}{d\theta}},$$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{\frac{dx}{d\theta} \frac{dy}{d\psi} - \frac{dx}{d\psi} \frac{dz}{d\theta}}{\frac{dx}{d\theta} \frac{dy}{d\psi} - \frac{dx}{d\psi} \frac{dy}{d\theta}};$$

substituant, dans ζ , ces valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$, il viendra

$$\zeta = \iint \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta} \frac{dy}{d\psi} - \frac{dx}{d\psi} \frac{dy}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta} \frac{dz}{d\psi} - \frac{dy}{d\psi} \frac{dz}{d\theta}\right)^2} \\ + \sqrt{\left(\frac{dz}{d\theta} \frac{dx}{d\psi} - \frac{dz}{d\psi} \frac{dx}{d\theta}\right)^2} d\theta d\psi.$$

Maintenant, en considérant r comme une fonction de θ et ψ , on a

$$\frac{dx}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \sin \theta \cos \psi + r \cos \theta \cos \psi,$$

$$\frac{dx}{d\psi} = \frac{dr}{d\psi} \sin \theta \cos \psi - r \sin \theta \sin \psi,$$

$$\frac{dy}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \sin \theta \sin \psi + r \cos \theta \sin \psi,$$

$$\frac{dy}{d\psi} = \frac{dr}{d\psi} \sin \theta \sin \psi + r \sin \theta \cos \psi,$$

$$\frac{dz}{d\theta} = \frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \sin \theta,$$

$$\frac{dz}{d\psi} = \frac{dr}{d\psi} \cos \theta;$$

d'où résulte

$$\frac{dx}{d\theta} \frac{dy}{d\psi} - \frac{dx}{d\psi} \frac{dy}{d\theta} = r \sin \theta \left(\frac{dr}{d\theta} \sin \theta + r \cos \theta \right),$$

$$\frac{dy}{d\theta} \frac{dz}{d\psi} - \frac{dy}{d\psi} \frac{dz}{d\theta} = -r \sin \theta \cos \psi \left(\frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \sin \theta \right) + r \frac{dr}{d\psi} \sin \psi,$$

$$\frac{dz}{d\theta} \frac{dx}{d\psi} - \frac{dz}{d\psi} \frac{dx}{d\theta} = -r \sin \theta \sin \psi \left(\frac{dr}{d\theta} \cos \theta - r \sin \theta \right) - r \frac{dr}{d\psi} \cos \psi;$$

faisant la somme des carrés de ces trois expressions et réduisant, on trouve que cette somme est égale à

$$r^3 \left\{ \left(\frac{dr}{d\psi} \right)^2 + \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right] \sin^2 \theta \right\}.$$

Pour l'expression de ζ , en coordonnées polaires, on a donc

$$(2) \quad \zeta = \int \int \sqrt{\left(\frac{dr}{d\psi} \right)^2 + \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 \right] \sin^2 \theta} r d\theta d\psi.$$

80. Pour donner un exemple de la réduction des intégrales multiples par un changement de coordonnées, nous appliquerons les formules générales qui précèdent à la détermination de l'aire et du volume d'un ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

ou

$$r = \frac{abc}{\sqrt{b^2 c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta (c^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)}}.$$

Considérons, en premier lieu, la formule (2). On a, dans ce cas,

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{-abc(a^2 c^2 \cos^2 \theta + a^2 b^2 \sin^2 \theta - b^2 c^2) \sin \theta \cos \psi}{[(b^2 c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta (c^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi))^{\frac{3}{2}}]},$$

$$\frac{dr}{d\psi} = \frac{-abc(a^2 b^2 - a^2 c^2) \sin^2 \theta \sin \psi \cos \psi}{[(b^2 c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta (c^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi))^{\frac{3}{2}}]}.$$

d'où

$$\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + r^2 = \frac{a^2 b^2 c^2 [b^2 c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta (c^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)]}{[b^2 c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta (c^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)]^2},$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} & \sqrt{\left(\frac{dr}{d\psi}\right)^2 + \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right] \sin^2 \theta} \\ &= abc \frac{\sqrt{b^2 c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta (c^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)}}{[b^2 c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta (c^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)]^{\frac{3}{2}}} \sin \theta. \end{aligned}$$

En intégrant entre les limites 0 et π par rapport à θ , et entre celles π et $-\pi$ par rapport à ψ , on aura donc, pour la surface entière S de l'ellipsoïde,

$$S = a^2 b^2 c^2 \int_{-\pi}^{+\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sqrt{b^2 c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta (c^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)}}{[b^2 c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta (c^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)]^{\frac{3}{2}}} \sin \theta d\theta d\psi.$$

Soit maintenant P la perpendiculaire abaissée du centre de l'ellipsoïde sur le plan tangent ; on a

$$P = \frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}}} = \frac{a^2 b^2 c^2}{r \sqrt{b^2 c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta (c^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)}};$$

d'où

$$\sqrt{b^2 c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta (c^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)} = \frac{a^2 b^2 c^2}{r \cdot P}.$$

On a d'ailleurs

$$\sqrt{b^2 c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta (c^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)} = \frac{abc}{r};$$

substituant dans S, on aura donc

$$(1) \quad S = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \frac{r^2 \sin \theta d\theta d\psi}{P}$$

intégrale double que l'on peut facilement réduire, comme nous le verrons bientôt, à une intégrale simple.

81. On peut encore présenter l'expression de l'aire S d'un ellipsoïde sous une forme un peu différente des précédentes. En effet, soient ξ, η deux nouvelles coordonnées polaires, liées à celles x, y, z par les relations

$$x = a \cos \xi, \quad y = b \sin \xi \cos \eta, \quad z = c \sin \xi \sin \eta,$$

en vertu desquelles l'équation de l'ellipsoïde se trouve vérifiée, puisque :

$$\frac{a^2 \cos^2 \xi}{a^2} + \frac{b^2 \sin^2 \xi \cos^2 \eta}{b^2} + \frac{c^2 \sin^2 \xi \sin^2 \eta}{c^2} = 1.$$

On aura

$$\frac{dx}{d\xi} = -a \sin \xi, \quad \frac{dx}{d\eta} = 0,$$

$$\frac{dy}{d\xi} = b \cos \xi \cos \eta, \quad \frac{dy}{d\eta} = b \sin \xi \sin \eta,$$

$$\frac{dz}{d\xi} = c \cos \xi \sin \eta, \quad \frac{dz}{d\eta} = c \sin \xi \cos \eta,$$

et, par suite,

$$\frac{dx}{d\eta} \frac{dy}{d\xi} - \frac{dx}{d\xi} \frac{dy}{d\eta} = -ab \sin^2 \xi \sin \eta,$$

$$\frac{dy}{d\eta} \frac{dz}{d\xi} - \frac{dy}{d\xi} \frac{dz}{d\eta} = bc \cos \xi \sin \xi,$$

$$\frac{dz}{d\eta} \frac{dx}{d\xi} - \frac{dz}{d\xi} \frac{dx}{d\eta} = ac \sin^2 \xi \cos \eta;$$

faisant la somme des carrés de ces trois expressions, réduisant et substituant dans S , on aura donc

$$S = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{b^2 c^2 \cos^2 \xi + a^2 \sin^2 \xi (c^2 \cos^2 \eta + b^2 \sin^2 \eta)} \sin \xi d\xi d\eta.$$

En posant encore

$$P = \frac{abc}{\sqrt{b^2 c^2 \cos^2 \xi + a^2 \sin^2 \xi (c^2 \cos^2 \eta + b^2 \sin^2 \eta)}},$$

on obtient

$$(2) \quad S = abc \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \xi d\xi d\eta}{P}.$$

82. La comparaison des résultats (1) et (2), conduit à une conséquence remarquable. On a

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \frac{r^3 \sin \theta d\theta d\psi}{P} = abc \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \xi d\xi d\eta}{P}.$$

On a d'ailleurs, en désignant par a' , b' les deux grands axes de l'ellipse que l'on obtient en coupant l'ellipsoïde par un plan parallèle au plan tangent dont P est la distance au centre,

$$abc = a'b'N;$$

d'où

$$N = \frac{abc}{a'b'},$$

et, par suite,

$$S = \int \int a'b' \sin \xi d\xi d\eta,$$

$$\frac{d^2 S}{a'b'} = \sin \xi d\xi d\eta.$$

En intégrant entre les limites $-\pi, \pi; 0, \pi$, on a donc

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \frac{d^2 S}{\pi a'b'} = 4.$$

Ainsi, la somme des éléments superficiels d'un ellipsoïde divisés par les aires des sections diamétrales parallèles aux plans tangents de ces éléments, est égale à 4. Ce théorème a été démontré géométriquement par M. Chasles dans ses applications du principe d'homographie.

83. Considérons maintenant la formule

$$V = \frac{1}{3} \int \int r^3 \sin \theta d\theta d\psi,$$

et appliquons cette formule à l'ellipsoïde dont l'équation est

$$r = \frac{abc}{\sqrt{b^2 c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta (c^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)}}$$

En prenant pour limites $-\pi$ et π , 0 et π , on trouvera pour le volume entier de l'ellipsoïde

$$V = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \frac{a^3 b^3 c^3}{3 [b^2 c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta (c^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)]^{\frac{3}{2}}} \sin \theta d\theta d\psi.$$

Mais ce volume, comme nous le verrons bientôt, est égal à $\frac{4}{3} \pi abc$. De là résulte pour la valeur de l'intégrale double définie du second membre

$$\int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin \theta d\theta d\psi}{[b^2 c^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta (c^2 \cos^2 \psi + b^2 \sin^2 \psi)]^{\frac{3}{2}}} = \frac{4\pi}{a^3 b^3 c^3}.$$

On obtient d'ailleurs immédiatement le volume dont il s'agit, en prenant les deux coordonnées nouvelles ξ, η liées aux anciennes x, y, z par les relations

$$x = a \cos \xi, \quad y = b \sin \xi \cos \eta, \quad z = c \sin \xi \sin \eta,$$

en vertu desquelles, comme nous l'avons vu, l'équation de l'ellipsoïde se trouve vérifiée. En refaisant les calculs qui précèdent, on trouve, en effet, que ce volume est exprimé par

$$V = \frac{1}{3} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} r^3 \sin \theta d\theta d\psi = \frac{1}{3} \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^{\pi} abc \sin \xi d\xi d\eta = \frac{4}{3} \pi abc.$$

SYSTÈME DE COORDONNÉES ELLIPTIQUES.

84. Dans ce système, un point quelconque de l'espace est déterminé, comme on sait, par l'intersection de trois surfaces homofocales du second degré dépendantes chacune d'un paramètre variable. Ainsi, en nommant λ, μ, ν ces trois paramètres, un point quelconque de l'espace est déterminé par l'intersection des trois surfaces

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1, \\ \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 1, \\ \frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 1. \end{cases}$$

où

$$b < c, \lambda > c > b, \mu > b < c, \nu < b < c.$$

La première appartient à un ellipsoïde, la seconde à un hyperboloïde à une nappe et la troisième à un hyperboloïde à deux nappes. Et l'on sait, tome I, n° (202), que ces trois surfaces se coupent partout à angles droits.

Les trois coordonnées orthogonales x, y, z sont liées à celles elliptiques λ, μ, ν , par les équations (1), ou par celles qu'on en déduit par une élimination convenable, et qui sont :

$$(2) \quad \begin{cases} x = \frac{\lambda \mu \nu}{bc} \\ y = \frac{\sqrt{(\lambda^2 - b^2)(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)}}{b \sqrt{c^2 - b^2}} \\ z = \frac{\sqrt{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)(c^2 - \nu^2)}}{c \sqrt{c^2 - b^2}} \end{cases}$$

Si, comme on le fait quelquefois, on substitue aux trois surfaces du second degré (1) d'autres surfaces analogues, par

exemple, la sphère à l'ellipsoïde et les deux cônes obliques à bases elliptiques aux deux hyperboloïdes, alors, en nommant ρ le rayon de la sphère, ou son paramètre, on aura

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = \rho^2, \\ \frac{x^2}{\mu^2} + \frac{y^2}{\mu^2 - b^2} - \frac{z^2}{c^2 - \mu^2} = 0, \\ \frac{x^2}{\nu^2} - \frac{y^2}{b^2 - \nu^2} - \frac{z^2}{c^2 - \nu^2} = 0, \end{array} \right.$$

en supposant toujours

$$c > b, \quad \mu > b < c, \quad \nu < b < c;$$

et, dans ce cas, les coordonnées rectangulaires x, y, z , seront liées à celles elliptiques ρ, μ, ν , par les trois équations (3) ou par celles qui s'en déduisent, savoir :

$$(4) \quad \left\{ \begin{array}{l} x = \frac{\rho \mu \nu}{bc}, \\ y = \rho \frac{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)}}{b \sqrt{c^2 - b^2}}, \\ z = \rho \frac{\sqrt{(c^2 - \mu^2)(c^2 - \nu^2)}}{c \sqrt{c^2 - b^2}}. \end{array} \right.$$

85. Considérons maintenant l'intégrale double

$$S = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} dx dy$$

à laquelle se rapporte l'évaluation de l'aire des surfaces courbes, et substituons aux coordonnées rectangulaires x, y, z celles elliptiques ρ, μ, ν , liées aux premières par les relations (4).

On aura, par la formule générale (1),

$$S = \iint \sqrt{\left(\frac{dx}{d\rho} \frac{dy}{d\mu} - \frac{dy}{d\nu} \frac{dx}{d\mu}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\nu} \frac{dz}{d\mu} - \frac{dz}{d\nu} \frac{dy}{d\mu}\right)^2 + \left(\frac{dz}{d\nu} \frac{dx}{d\mu} - \frac{dx}{d\nu} \frac{dz}{d\mu}\right)^2} d\mu d\nu,$$

et, en différenciant les équations (4), et posant pour abrégé,

$$\sqrt{\mu^2 - b^2} = \alpha, \quad \sqrt{(b^2 - v^2)} = \epsilon, \quad \sqrt{c^2 - \mu^2} = \gamma, \quad \sqrt{c^2 - v^2} = \varepsilon,$$

$$\frac{dx}{d\mu} = \frac{\rho v + \mu v \frac{d}{d\mu}}{bc}$$

$$\frac{dx}{dv} = \frac{\rho v + \mu v \frac{d\rho}{dv}}{bc},$$

$$\frac{dy}{d\mu} = \frac{1}{b\sqrt{c^2 - b^2}} \left(\alpha \epsilon \frac{d\rho}{d\mu} + \frac{\epsilon}{\alpha} \rho \mu \right),$$

$$\frac{dy}{dv} = \frac{1}{b\sqrt{c^2 - b^2}} \left(\alpha \epsilon \frac{d\rho}{dv} - \frac{\alpha}{\epsilon} \rho v \right),$$

$$\frac{dz}{d\mu} = \frac{1}{c\sqrt{c^2 - b^2}} \left(\gamma \varepsilon \frac{d\rho}{d\mu} - \frac{\varepsilon}{\gamma} \rho \mu \right),$$

$$\frac{dz}{dv} = \frac{1}{c\sqrt{c^2 - b^2}} \left(\gamma \varepsilon \frac{d\rho}{dv} - \frac{\gamma}{\varepsilon} \rho v \right);$$

d'où

$$\begin{aligned} & \frac{dx}{dv} \frac{dy}{d\mu} - \frac{dy}{dv} \frac{dx}{d\mu} \\ &= \frac{1}{\alpha \epsilon \gamma \varepsilon b c \sqrt{c^2 - b^2}} \left[\mu \frac{d\rho}{d\mu} \alpha^2 + v \frac{d\rho}{dv} \epsilon^2 + \rho (\mu^2 - v^2) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{dy}{dv} \frac{dz}{d\mu} - \frac{dx}{dv} \frac{dz}{d\mu} \\ &= \frac{\rho}{\alpha \epsilon \gamma \varepsilon b c} \left[\rho \mu v (\mu^2 - v^2) - \mu \frac{d\rho}{dv} \epsilon^2 \varepsilon^2 - v \frac{d\rho}{d\mu} \alpha^2 \gamma^2 \right]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \frac{dz}{dv} \frac{dx}{d\mu} - \frac{dx}{dv} \frac{dz}{d\mu} \\ &= \frac{\rho}{\gamma \varepsilon c \sqrt{c^2 - b^2}} \left[\mu \frac{d\rho}{d\mu} \gamma^2 - v \frac{d\rho}{dv} \varepsilon^2 - \rho (\mu^2 - v^2) \right]; \end{aligned}$$

réduisant les fractions au même dénominateur et faisant la somme des carrés de ces trois expressions, on trouve que cette somme est égale à

$$\rho^2 \cdot \frac{(\mu^2 - \nu^2) \left[\alpha^2 \gamma^2 \left(\frac{d\rho}{d\mu} \right)^2 + 6^2 \epsilon^2 \left(\frac{d\rho}{d\nu} \right)^2 + \rho^2 (\mu^2 - \nu^2) \right]}{\alpha^2 6^2 \gamma^2 \epsilon^2}.$$

En prenant les limites 0 et b pour μ , et b et c pour ν , on aura la huitième partie de la surface de l'ellipsoïde; on aura donc

$$= \int_0^b \int_b^c \sqrt{\frac{(\mu^2 - \nu^2) \left[\alpha^2 \gamma^2 \left(\frac{d\rho}{d\mu} \right)^2 + 6^2 \epsilon^2 \left(\frac{d\rho}{d\nu} \right)^2 + \rho^2 (\mu^2 - \nu^2) \right]}{\alpha^2 6^2 \gamma^2 \epsilon^2}} p d\mu d\nu.$$

Dans le cas où la surface donnée est une sphère, alors ρ est constant;

$$\frac{d\rho}{d\mu} = 0, \quad \frac{d\rho}{d\nu} = 0,$$

et l'intégrale ci-dessus se réduit à celle

$$\int_0^b \int_b^c \frac{(\mu^2 - \nu^2) d\mu d\nu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)(c^2 - \mu^2)(c^2 - \nu^2)}},$$

qui exprime la huitième partie de la sphère. Or, la surface entière de la sphère est égale, comme on le sait, à $4\pi r^2$. On a donc

$$\int_0^b \int_b^c \frac{(\mu - \nu) d\mu d\nu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)(c^2 - \mu^2)(c^2 - \nu^2)}} = \frac{\pi}{2}.$$

Cette intégrale importante a été donnée pour la première fois par M. Lamé dans son Mémoire sur les surfaces isothermes. M. Chasles en a donné la démonstration géométrique suivante qui est remarquable par sa simplicité :

Considérons un ellipsoïde

$$\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{\lambda^2 - b^2} + \frac{z^2}{\lambda^2 - c^2} = 1,$$

dont les trois axes ou demi-diamètres principaux sont $\lambda, \sqrt{\lambda^2 - b^2}, \sqrt{\lambda^2 - c^2}$, et supposons qu'on fasse croître le demi-diamètre λ d'une quantité $d\lambda$, de manière à produire un second ellipsoïde infiniment peu différent du premier (λ). Supposons, en outre, qu'en chaque point M de la surface du premier ellipsoïde, on prenne l'épaisseur ds de la couche comprise entre cette surface et celle du second ellipsoïde; puis qu'on fasse le produit du rapport $\frac{d\lambda}{ds}$ par l'élément superficiel $d\omega$ du premier ellipsoïde. La somme de tous ces produits ou $\int \frac{d\lambda}{ds} d\omega$, étendue à la huitième partie de l'ellipsoïde, sera donnée, d'après ce qui précède, par l'équation

$$\int \frac{d\lambda}{ds} ds' ds'' = b \sqrt{\lambda^2 - b^2} \sqrt{\lambda^2 - c^2} \int_0^b \int_0^c \frac{(\mu^2 - v^2 d\mu dv)}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)(c^2 - v^2)(b^2 - v^2)}};$$

et si maintenant on exprime $\frac{d\lambda}{ds}$ en coordonnées rectangulaires x, y, z , on trouvera, en remarquant d'abord que ds est l'élément de la normale à l'ellipsoïde (λ), comprise entre les deux ellipsoïdes infiniment voisins ayant λ et $\lambda + d\lambda$ pour paramètres; et ensuite que lorsque λ varie seul, on a $\frac{dx}{x} = \frac{d\lambda}{\lambda}$,

$$ds = \lambda \sqrt{\frac{x^2}{\lambda^4} + \frac{y^2}{(\lambda^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(\lambda^2 - c^2)^2}} d\lambda;$$

d'où

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{1}{\lambda \sqrt{\frac{x^2}{\lambda^4} + \frac{y^2}{(\lambda^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(\lambda^2 - c^2)^2}}}.$$

Or, il est clair que l'expression

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{x^2}{\lambda^2} + \frac{y^2}{(\lambda^2 - b^2)^2} + \frac{z^2}{(\lambda^2 - c^2)^2}}}$$

est celle de la perpendiculaire abaissée de l'origine sur le plan tangent à l'ellipsoïde qui passe par le point $M(x, y, z)$. En appelant P cette perpendiculaire, on aura donc

$$\frac{d\lambda}{ds} = \frac{P}{\lambda},$$

et, par suite,

$$\int \frac{d\lambda}{ds} d\omega = \int \frac{P}{\lambda} d\omega = \frac{1}{\lambda} \int P d\omega.$$

D'un autre côté, et d'après une remarque de Terquem, il est évident que $\int P d\omega$ est le triple du volume de l'ellipsoïde (λ) , volume qui est d'ailleurs égal au produit de ses trois axes multiplié par $\frac{4}{3}\pi$, ou a

$$\frac{4}{3}\pi\lambda\sqrt{\lambda^2 - b^2}\sqrt{\lambda^2 - c^2}.$$

On a donc enfin

$$\begin{aligned} \int \frac{d\lambda}{ds} d\omega &= \frac{1}{\lambda} \int P d\omega = 4\pi \sqrt{(\lambda^2 - b^2)} \sqrt{\lambda^2 - c^2} \\ &= 8 \sqrt{\lambda^2 - b^2} \sqrt{\lambda^2 - c^2} \int_0^b \int_0^c \frac{(\mu^2 - \nu^2) d\mu d\nu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}}, \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$\int_0^b \int_0^c \frac{(\mu^2 - \nu^2) d\mu d\nu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(c^2 - \mu^2)(b^2 - \nu^2)(c^2 - \nu^2)}} = \frac{\pi}{2}.$$

86. Poisson a vérifié comme il suit l'équation qui précède :

On a

$$\int_0^b \frac{dv}{\sqrt{(b^2-v^2)(c^2-v^2)}} \int_b^c \frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}} \\ - \int_0^b \frac{v^2 dv}{\sqrt{(b^2-v^2)(c^2-v^2)}} \int_b^c \frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}} = \frac{\pi}{2}.$$

Posant

$$v = b \sin \varphi, \quad dv = b \cos \varphi d\varphi, \quad b = ac,$$

les limites 0 et b pourront être remplacées par celles 0 et $\frac{\pi}{2}$; et l'on aura

$$\int_0^b \frac{dv}{\sqrt{(b^2-v^2)(c^2-v^2)}} = \frac{1}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-a^2 \sin^2 \varphi}}, \\ \int_0^b \frac{v^2 dv}{\sqrt{(b^2-v^2)(c^2-v^2)}} \\ = c \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-a^2 \sin^2 \varphi}} - c \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-a^2 \sin^2 \varphi} d\varphi.$$

Posant ensuite

$$\frac{\mu^2 - b^2}{c^2 - \mu^2} = \cot^2 \theta, \quad \mu^2 = c^2 - (c^2 - b^2) \sin^2 \theta, \\ d\mu = \frac{(c^2 - b^2) \sin \theta \cos \theta d\theta}{\sqrt{c^2 - (c^2 - b^2) \sin^2 \theta}}, \quad c^2 - b^2 = c^2 a^2,$$

les limites relatives à μ seront $\theta = \frac{\pi}{2}$, et $\theta = 0$, et l'on aura

$$\int_b^c \frac{d\mu}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}} = \frac{1}{c} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{1-a^2 \sin^2 \theta}}, \\ \int_b^c \frac{\mu^2 d\mu}{\sqrt{(\mu^2-b^2)(c^2-\mu^2)}} = c \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-a^2 \sin^2 \theta} d\theta.$$

Si maintenant, adoptant les notations de Legendre, on fait

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\varphi}{\sqrt{1-a^2 \sin^2 \varphi}} = F(a),$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-a^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = E(a),$$

on trouvera

$$F(a)E(x) + F(x)E(a) - F(a)F(x) = \frac{\pi}{2},$$

formule qui coïncide avec celle donnée par cet illustre géomètre. Les intégrales $F(a)$ et $E(a)$, qui figurent dans cette expression, et dont la seconde représente la longueur d'un arc d'ellipse, ont été nommées par Legendre *fonctions elliptiques* de première et de seconde espèce.

87. Considérons maintenant l'intégrale triple

$$V = \iiint dx dy dz$$

à laquelle se rapporte l'évaluation des solides en coordonnées rectangulaires, et substituons à ces coordonnées x, y, z , celles elliptiques ρ, μ, ν liées aux premières par les relations

$$x = \frac{\rho \mu \nu}{bc},$$

$$y = \rho \frac{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)}}{b \sqrt{c^2 - b^2}},$$

$$z = \rho \frac{\sqrt{(c^2 - \mu^2)(c^2 - \nu^2)}}{c \sqrt{c^2 - b^2}}.$$

On aura

$$V = \iiint \left(\frac{dx}{d\rho} \frac{dy}{d\mu} - \frac{dx}{d\mu} \frac{dy}{d\rho} \right) \frac{dz}{d\nu} + \left(\frac{dy}{d\rho} \frac{dz}{d\mu} - \frac{dy}{d\mu} \frac{dz}{d\rho} \right) \frac{dx}{d\nu} + \left(\frac{dz}{d\rho} \frac{dx}{d\mu} - \frac{dz}{d\mu} \frac{dx}{d\rho} \right) \frac{dy}{d\nu} d\rho d\mu d\nu.$$

et, en différentiant les équations qui précèdent,

$$\frac{dx}{d\rho} = \frac{\mu\nu}{bc}, \quad \frac{dx}{d\mu} = \frac{\rho\nu}{bc}, \quad \frac{dx}{d\nu} = \frac{\rho\mu}{bc}.$$

$$\frac{dy}{d\rho} = \frac{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}, \quad \frac{dz}{d\rho} = \frac{\sqrt{(c^2 - \mu^2)(c^2 - \nu^2)}}{c\sqrt{c^2 - b^2}},$$

$$\frac{dy}{d\mu} = \frac{\rho\mu}{\sqrt{\mu^2 - b^2}} \frac{\sqrt{b^2 - \nu^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}, \quad \frac{dz}{d\mu} = -\frac{\rho\mu}{\sqrt{c^2 - \mu^2}} \frac{\sqrt{c^2 - \nu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}},$$

$$\frac{dy}{d\nu} = -\frac{\rho\nu}{\sqrt{b^2 - \nu^2}} \frac{\sqrt{\mu^2 - b^2}}{b\sqrt{c^2 - b^2}}, \quad \frac{dz}{d\nu} = -\frac{\rho\nu}{\sqrt{c^2 - \nu^2}} \frac{\sqrt{c^2 - \mu^2}}{c\sqrt{c^2 - b^2}},$$

ce qui donne

$$\Delta = \frac{\rho^2(\mu^2 - \nu^2)}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)(c^2 - \mu^2)(c^2 - \nu^2)}}.$$

On aura, par suite, pour l'expression du volume V

$$V = \int \int \int \frac{\rho^2(\mu^2 - \nu^2)}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)(c^2 - \mu^2)(c^2 - \nu^2)}} d\rho d\mu d\nu,$$

et, en intégrant par rapport à ρ , entre les limites 0 et ρ ,

$$V = \frac{1}{3} \int \int \frac{\rho^3(\mu^2 - \nu^2)}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)(c^2 - \mu^2)(c^2 - \nu^2)}} d\mu d\nu.$$

En supposant ρ constant, on sera ramené au cas d'une sphère; et en prenant les limites b et c pour μ ; 0 et b pour ν , on aura la huitième partie du volume de cette sphère. Le volume entier sera donc exprimé par

$$V = \frac{8}{3} \rho^3 \int_0^b \int_b^c \frac{(\mu^2 - \nu^2)}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)(c^2 - \mu^2)(c^2 - \nu^2)}} d\mu d\nu.$$

Mais ce volume est connu et égal à $\frac{4}{3}\rho^3$. Donc

$$\int_0^b \int_b^c \frac{\nu(\mu^2 - \nu^2) d\mu d\nu}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)(c^2 - \mu^2)(c^2 - \nu^2)}} = \frac{\pi}{2}.$$

88. Dans le cas où l'on substitue aux coordonnées x, y, z celles λ, μ, v , liées aux premières par les relations

$$x = \frac{\lambda \mu v}{bc},$$

$$y = \frac{\sqrt{(\lambda^2 - b^2)(\mu^2 - b^2)(b^2 - v^2)}}{b\sqrt{c^2 - b^2}},$$

$$z = \frac{\sqrt{(\lambda^2 - c^2)(\mu^2 - c^2)(c^2 - v^2)}}{c\sqrt{c^2 - b^2}}.$$

On a

$$v = \iiint \left(\frac{dx}{d\lambda} \frac{dy}{d\mu} - \frac{dx}{d\mu} \frac{dy}{d\lambda} \right) \frac{dz}{dv} + \left(\frac{dy}{d\lambda} \frac{dz}{d\mu} - \frac{dy}{d\mu} \frac{dz}{d\lambda} \right) \frac{dx}{dv} + \left(\frac{dz}{d\lambda} \frac{dx}{d\mu} - \frac{dz}{d\mu} \frac{dx}{d\lambda} \right) \frac{dy}{dv} d\lambda d\mu dv.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{dx}{d\lambda} = \frac{\mu v}{bc}, \quad \frac{dx}{d\mu} = \frac{\lambda v}{bc}, \quad \frac{dx}{dv} = \frac{\lambda \mu}{bc},$$

$$\frac{dy}{d\lambda} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - b^2}} \frac{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(b^2 - v^2)}}{b\sqrt{c^2 - b^2}},$$

$$\frac{dz}{d\lambda} = \frac{\lambda}{\sqrt{\lambda^2 - c^2}} \frac{\sqrt{(c^2 - \mu^2)(c^2 - v^2)}}{c\sqrt{c^2 - b^2}},$$

$$\frac{dy}{d\mu} = \frac{\mu}{\sqrt{\mu^2 - b^2}} \frac{\sqrt{(\lambda^2 - b^2)(b^2 - v^2)}}{b\sqrt{c^2 - b^2}},$$

$$\frac{dz}{d\mu} = -\frac{\mu}{\sqrt{c^2 - \mu^2}} \frac{\sqrt{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - v^2)}}{c\sqrt{c^2 - b^2}},$$

$$\frac{dy}{dv} = -\frac{v}{\sqrt{b^2 - v^2}} \frac{\sqrt{(\lambda^2 - b^2)(\mu^2 - b^2)}}{b\sqrt{c^2 - b^2}},$$

$$\frac{dz}{dv} = -\frac{v}{\sqrt{c^2 - v^2}} \frac{\sqrt{(\lambda^2 - c^2)(c^2 - \mu^2)}}{c\sqrt{c^2 - b^2}},$$

et, par suite,

$$\Delta = \frac{\lambda^4(\mu^2 - \nu^2) + \mu^4(\nu^2 - \lambda^2) + \nu^4(\lambda^2 - \mu^2)}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)(c^2 - \mu^2)(c^2 - \nu^2)(\lambda^2 - b^2)(\lambda^2 - c^2)}} \\ = \frac{(\lambda^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)(\lambda^2 - \nu^2)}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)(c^2 - \mu^2)(c^2 - \nu^2)(\lambda^2 - b^2)(\lambda^2 - c^2)}}.$$

Pour l'expression de V, on a donc

$$v = \int \int \int \frac{(\lambda^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)(\lambda^2 - \nu^2)}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)(c^2 - \mu^2)(c^2 - \nu^2)(\lambda^2 - b^2)(\lambda^2 - c^2)}} d\lambda d\mu d\nu.$$

En prenant les limites 0 et b pour ν ; b et c pour μ ; c et λ pour λ , l'intégrale qui précède représentera la huitième partie du volume de l'ellipsoïde (λ). Le volume entier sera donc égal à huit fois cette intégrale ou a

$$V = 8 \int_0^b \int_b^c \int_c^\lambda \frac{(\lambda^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)(\lambda^2 - \nu^2)}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)(c^2 - \mu^2)(c^2 - \nu^2)(\lambda^2 - b^2)(\lambda^2 - c^2)}} d\lambda d\mu d\nu.$$

Mais ce volume est égal au produit $\lambda \sqrt{(\lambda^2 - b^2)(\lambda^2 - c^2)}$ des trois axes multiplié par $\frac{4}{3} \pi$. De là résulte, pour la valeur de l'intégrale triple du second membre,

$$\int_0^b \int_b^c \int_c^\lambda \frac{(\lambda^2 - \mu^2)(\mu^2 - \nu^2)(\lambda^2 - \nu^2)}{\sqrt{(\mu^2 - b^2)(b^2 - \nu^2)(c^2 - \mu^2)(c^2 - \nu^2)(\lambda^2 - b^2)(\lambda^2 - c^2)}} d\lambda d\mu d\nu \\ = \frac{\pi}{6} \lambda \sqrt{(\lambda^2 - b^2)(\lambda^2 - c^2)}.$$

On pourrait démontrer directement cette intégrale comme on l'a fait pour celle du n° (85).

MÉTHODE DE LEJEUNE-DIRICHLET.

89. Lejeune-Dirichlet a fait connaître une méthode très-ingénieuse pour la réduction ou la détermination des intégrales multiples d'un ordre quelconque. Cette méthode consiste simplement à multiplier l'expression différentielle qu'il s'agit d'intégrer, par un facteur dont la valeur soit égale à l'unité, dans toute l'étendue que les intégrations doivent occuper, et qui s'évanouisse en dehors de cette étendue. L'expression proposée pouvant alors être intégrée entre des limites très-simples telles que 0 et ∞ ou $-\infty$ et ∞ , est, dans beaucoup de cas, plus facile à traiter que sous sa forme primitive. Pour en donner un exemple, nous prendrons l'intégrale triple suivante :

$$S = \frac{1}{n-1} \iiint \frac{dx dy dz}{\rho^{n-1}}.$$

qui se rapporte au calcul de l'attraction de l'ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

sur un point extérieur ou intérieur, et dans laquelle x, y, z sont des variables qui doivent prendre toutes les valeurs positives qui satisfont à l'inégalité

$$(x) \quad \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leq 1,$$

ρ étant déterminé d'ailleurs par l'équation

$$\rho^2 = (x - \alpha)^2 + (y - \beta)^2 + (z - \gamma)^2.$$

L'intégrale

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \theta}{\theta} \cos m\theta d\theta$$

étant égale, comme on l'a vu n° (56), à l'unité ou à zéro, suivant que la constante positive m est inférieure ou supérieure à l'unité, cette intégrale sera le facteur par lequel il faut multiplier la proposée S pour la réduire à une forme plus facilement intégrable. On pourra donc considérer l'intégrale S comme la partie réelle de la suivante :

$$U = -\frac{2}{\pi(n-1)} \int_0^\pi d\theta \frac{\sin \theta}{\theta} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2\right] \theta \sqrt{-1}} \frac{dx dy dz}{\rho^{n-1}},$$

dans laquelle les intégrations, par rapport aux variables x, y, z , peuvent maintenant s'étendre depuis $-\infty$ jusqu'à ∞ .

Pour obtenir l'intégrale triple qui se rapporte à ces variables, on exprimera la fraction

$$\frac{1}{\rho^{n-1}} = (\rho^2)^{\frac{n-1}{2}}$$

par une intégrale définie, au moyen de la formule connue d'Euler, démontrée par Poisson, savoir :

$$(a) \quad \int_0^\infty e^{p\psi\sqrt{-1}} \psi^{q-1} d\psi = \frac{\Gamma(q)}{p^q} e^{\frac{q\pi}{2}\sqrt{-1}};$$

et l'on aura, en remplaçant ρ^2 par sa valeur,

$$U = -\frac{2}{\pi} \frac{e^{-(n-1)\frac{\pi}{2}\sqrt{-1}}}{(n-1)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_0^\pi d\theta \frac{\sin \theta}{\theta} \int_0^\infty d\psi \psi^{\frac{n-1}{2}} e^{(x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz)\psi\sqrt{-1}} V,$$

V désignant le produit :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\left[\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2\right] \theta \sqrt{-1} + (x^2+y^2+z^2-2ax-2by-2cz)\psi\sqrt{-1}} dx dy dz.$$

des trois intégrales simples relatives à x, y, z , dont les valeurs respectives sont, en vertu de la formule suivante,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{(q\varphi^2+2qr\varphi)\sqrt{-1}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{q}} e^{-qr^2} \frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}},$$

qui dérive de la formule précédente (a) :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left[\left(\psi + \frac{\theta}{a^2}\right)x^2 - 2\alpha\psi x\right]} dx = \sqrt{\frac{\pi}{\psi + \frac{\theta}{a^2}}} e^{\frac{-2\alpha^2\psi}{\psi + \frac{\theta}{a^2}}} \frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left[\left(\psi + \frac{\theta}{b^2}\right)y^2 - 2\beta\psi y\right]} dy = \sqrt{\frac{\pi}{\psi + \frac{\theta}{b^2}}} e^{\frac{-2\beta^2\psi}{\psi + \frac{\theta}{b^2}}} \frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}},$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\left[\left(\psi + \frac{\theta}{c^2}\right)z^2 - 2\gamma\psi z\right]} dz = \sqrt{\frac{\pi}{\psi + \frac{\theta}{c^2}}} e^{\frac{-2\gamma^2\psi}{\psi + \frac{\theta}{c^2}}} \frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}.$$

En substituant ces valeurs, et remplaçant ensuite la variable ψ par une autre telle que $\psi = \frac{\theta}{\sigma}$; observant que

$$\left(\frac{1+\sqrt{-1}}{\sqrt{2}}\right)^2 = \sqrt{-1} e^{\frac{\pi}{4}\sqrt{-1}},$$

puis posant pour abréger

$$\xi = \frac{\alpha^2}{a^2 + \sigma} + \frac{\beta^2}{b^2 + \sigma} + \frac{\gamma^2}{c^2 + \sigma},$$

on trouvera, après avoir différentié par rapport à a , pour avoir la composante A de l'attraction de l'ellipsoïde parallèle à l'axe des x ,

$$A = \frac{4a}{a^2} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} e^{-\frac{(n-2)\pi}{4}\sqrt{-1}} \\ \times \int_0^\infty \frac{d\sigma \sigma^{1-\frac{n}{2}}}{\sqrt{\left(1+\frac{\sigma}{a^2}\right)\left(1+\frac{\sigma}{b^2}\right)\left(1+\frac{\sigma}{c^2}\right)}} \int_0^\infty e^{\xi\theta\sqrt{-1}} \frac{\sin\theta}{\theta^{2-\frac{n}{2}}} d\theta.$$

Maintenant, et d'après ce qu'on a vu au commencement de ce paragraphe, cette expression doit être réduite à sa partie réelle; tout revient donc à obtenir celle de

$$e^{-\frac{(n-2)\pi}{4}\sqrt{-1}} \int_0^\infty e^{\xi\theta\sqrt{-1}} \frac{\sin\theta}{\theta^{2-\frac{n}{2}}} d\theta.$$

Or, cette intégrale, en y remplaçant $\sin \theta$ par des exponentielles imaginaires, sera immédiatement donnée par la formule (a), en ayant soin d'observer que le second membre de cette

équation doit être remplacé par $\frac{\Gamma(q) e^{-\frac{\pi}{2}q\sqrt{-1}}}{(-p)^q}$ lorsque p a une valeur négative. On trouve donc que la partie réelle qu'il s'agit d'obtenir est égale à zéro ou à

$$\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}-1\right) \sin \frac{n\pi}{2}}{2(1-\xi)^{\frac{\pi}{2}-1}} = \frac{\pi}{2\Gamma\left(2-\frac{n}{2}\right)(1-\xi)^{\frac{\pi}{2}-1}}$$

suivant que $\xi > 1$ ou $\xi < 1$.

Maintenant si le point (x, y, z) est intérieur à l'ellipsoïde (a), on aura

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 < 1,$$

et aussi $\xi < 1$. Dans ce cas, on aura donc

$$A = \frac{2\alpha}{a^2} \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{(n-1)} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right)}$$

$$\int_0^\infty \frac{d\sigma \sigma^{1-\frac{n}{2}}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\sigma}{a^2}\right) \left(1 + \frac{\sigma}{b^2}\right) \left(1 + \frac{\sigma}{c^2}\right)}} \left(1 - \frac{\alpha^2}{a^2 + \sigma} - \frac{\beta^2}{b^2 + \sigma} - \frac{\gamma^2}{c^2 + \sigma}\right)^{1-\frac{n}{2}}.$$

Si le point est extérieur, on déterminera la racine positive unique λ de l'équation

$$\xi = \frac{\alpha^2}{a^2 + \sigma} + \frac{\beta^2}{b^2 + \sigma} + \frac{\gamma^2}{c^2 + \sigma} = 1,$$

et l'on aura évidemment $\xi > 1$ ou $\xi < 1$, suivant que $\sigma < \lambda$ ou $\sigma > \lambda$. Dans ce cas, on aura donc

$$A = \frac{2\alpha}{a^2} \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{(n-1)} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right) \Gamma\left(2 - \frac{n}{2}\right)}$$

$$\int_\lambda^\infty \frac{d\sigma \sigma^{1-\frac{n}{2}}}{\sqrt{\left(1 + \frac{\sigma}{a^2}\right) \left(1 + \frac{\sigma}{b^2}\right) \left(1 + \frac{\sigma}{c^2}\right)}} \left(1 - \frac{\alpha^2}{a^2 + \sigma} - \frac{\beta^2}{b^2 + \sigma} - \frac{\gamma^2}{c^2 + \sigma}\right)^{1-\frac{n}{2}}.$$

90. Comme second exemple de sa méthode, Lejeune-Dirichlet indique l'intégrale multiple d'ordre n :

$$S = \int \int \int \dots x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} \dots dx dy dz,$$

dans laquelle x, y, z sont des variables qui doivent prendre toutes les valeurs positives qui satisfont à l'inégalité

$$\left(\frac{x}{a}\right)^d + \left(\frac{y}{b}\right)^e + \left(\frac{z}{c}\right)^f + \dots < 1,$$

$p, q, r, \dots, a, b, c, \dots, \alpha, \beta, \gamma$, étant des constantes positives ; et, par l'application du même procédé, il est conduit à l'expression très-remarquable de S savoir :

$$S = \frac{a^p b^q c^r \dots}{a^p \beta^q \gamma^r \dots} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right) \Gamma\left(\frac{r}{\gamma}\right) \dots}{\Gamma\left(1 + \frac{p}{\alpha} + \frac{q}{\beta} + \frac{r}{\gamma} + \dots\right)},$$

que l'on peut, dit-il, obtenir par différents moyens, et qui renferme un grand nombre de résultats relatifs aux volumes, centres de gravité, etc. Nous choisirons, pour démontrer cette formule, l'un de ces moyens, et, pour plus de généralité, nous considérerons l'intégrale multiple d'ordre n :

$$S = \int \int \int \dots x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} \dots (a-x-y-z)^{s-1} \dots dx dy dz \dots$$

dans laquelle x, y, z sont des variables qui doivent prendre toutes les valeurs positives qui satisfont à l'inégalité

$$x + y + z + \dots < a,$$

a étant une constante.

En supposant que S ne contienne que trois variables x, y, z , on pourra écrire :

$$S = \int_0^a x^{p-1} dx \int_0^{a-x} y^{q-1} dy \int_0^{a-x-y} z^{r-1} (a-x-y-z)^{s-1} dz,$$

et, si on intègre ensuite par rapport à z , en faisant usage pour cela de la formule (8) du n° (75), on aura,

$$\int_0^{a-x-y} z^{r-1} (a-x-y-z)^{s-1} dz = (a-x-y)^{r+s-1} \frac{\Gamma(r) \Gamma(s)}{\Gamma(r+s)},$$

en sorte que

$$S = \int_0^a x^{p-1} dx \int_0^{a-x} y^{q-1} dy (a-x-y)^{r+s-1} \frac{\Gamma(r) \Gamma(s)}{\Gamma(r+s)}.$$

On aura de même, en intégrant par rapport à y ,

$$\int_0^{a-x} y^{q-1} (a-x-y)^{r+s-1} dy = (a-x)^{q+r+s-1} \frac{\Gamma(q) \Gamma(r+s)}{\Gamma(q+r+s)};$$

d'où il suit que

$$S = \int_0^a x^{p-1} dx (a-x)^{q+r+s-1} \frac{\Gamma(q) \Gamma(r+s)}{\Gamma(q+r+s)} \cdot \frac{\Gamma(r) \Gamma(s)}{\Gamma(r+s)},$$

et, en intégrant par rapport à x ,

$$\int_0^a x^{p-1} (a-x)^{q+r+s-1} dx = a^{p+q+r+s-1} \frac{\Gamma(p) \Gamma(q+r+s)}{\Gamma(p+q+r+s)},$$

ce qui donne

$$S = a^{p+q+r+s-1} \frac{\Gamma(p) \Gamma(q) \Gamma(r) \Gamma(s)}{\Gamma(p+q+r+s)}.$$

Cette méthode de réduction successive est évidemment générale, c'est-à-dire que l'on aura pour le cas de n variables

$$\begin{aligned} & \int \int \int \dots x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} \dots (a-x-y-z\dots) dx dy dz \dots \\ &= a^{p+q+r+s+\dots-1} \frac{\Gamma(p) \Gamma(q) \Gamma(r) \Gamma(s) \dots}{\Gamma(p+q+r+s+\dots)}, \end{aligned}$$

et, en faisant dans cette dernière $s=1$, $a=1$,

$$\int \int \int \dots x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} \dots dx dy dz \dots = \frac{\Gamma(p) \Gamma(q) \Gamma(r) \dots}{\Gamma(1+p+q+r+\dots)},$$

cette intégrale étant étendue à toutes les valeurs positives de $x, y, z, \dots$, qui satisfont à l'inégalité

$$x+y+z+\dots < 1.$$

Il en résulte que l'intégrale

$$\int \int \int \dots x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} \dots dx dy dz \dots,$$

'étendue à toutes les valeurs positives de x, y, z , qui satisfont à l'inégalité

$$\left(\frac{x}{a}\right)^{\alpha} + \left(\frac{y}{b}\right)^{\beta} + \left(\frac{z}{c}\right)^{\gamma} + \dots < 1,$$

sera donnée par la formule

$$S = \frac{a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma} \dots}{\alpha^{\alpha} \beta^{\beta} \gamma^{\gamma} \dots} \frac{\Gamma\left(\frac{\rho}{\alpha}\right) \Gamma\left(\frac{q}{\beta}\right) \Gamma\left(\frac{r}{\gamma}\right) \dots}{\Gamma\left(1 + \frac{\rho}{\alpha} + \frac{q}{\beta} + \frac{r}{\gamma} + \dots\right)},$$

qui est celle de Lejeune-Dirichlet. Cette formule présente, comme on le voit, une généralisation fort remarquable de la formule d'Euler, donnée n° (74).

91. Pour montrer, par un exemple, l'application qu'on peut faire de cette formule, nous prendrons l'équation

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1$$

qui est celle de la surface de l'ellipsoïde, et nous nous proposerons de trouver le volume compris entre cette surface, et les plans passant par les axes $2a, 2b, 2c$, ou la huitième partie de cet ellipsoïde. On a, dans ce cas, $\alpha = \beta = \gamma = 2$, $\rho = q = r = 1$, et, par suite,

$$V = \frac{abc}{8} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^3}{\Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right)}.$$

Mais, n° (72)

$$\Gamma\left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right),$$

et

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \sqrt{\pi}.$$

Donc

$$V = \frac{\pi abc}{6}.$$

Pour le volume entier, on trouve $\frac{4}{3} \pi abc$.

MÉTHODE DE M. E. CATALAN.

92. Dans un Mémoire important inséré au Journal de M. Liouville, M. E. Catalan a indiqué, à l'aide de considérations géométriques fort simples, une méthode nouvelle qui s'applique à la réduction d'un grand nombre d'intégrales multiples. C'est de son Mémoire que nous avons extrait les développements qui suivent.

Considérons, en premier lieu, l'intégrale double

$$S = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} dx dy,$$

qui donne l'aire d'une surface courbe rapportée aux coordonnées rectangulaires x, y, z , et supposons que cette surface soit celle d'un ellipsoïde représentée, comme on sait, par l'équation

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

On aura

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{c^2 x}{a^2 z}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{c^2 y}{b^2 z},$$

et, en substituant ces valeurs dans la précédente, il viendra, pour la huitième partie de la surface de l'ellipsoïde,

$$S = \iint \sqrt{\frac{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 \left(1 - \frac{c^2}{a^2}\right) - \left(\frac{y}{b}\right)^2 \left(1 - \frac{c^2}{b^2}\right)}{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}} dx dy,$$

les intégrations devant être étendues à toutes les valeurs positives de x et de y qui satisfont à la condition

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1.$$

Maintenant si, pour abrégér, on pose

$$a > b > c, \quad \frac{x}{a} = \eta, \quad \frac{y}{b} = \mu, \quad 1 - \frac{c^2}{a^2} = \alpha^2, \quad 1 - \frac{c^2}{b^2} = \epsilon^2,$$

alors, l'intégrale qu'il s'agit d'obtenir sera,

$$S = ab \iint \sqrt{\frac{1 - \alpha^2 \eta^2 - \epsilon^2 \mu^2}{1 - \eta^2 - \mu^2}} d\eta d\mu,$$

ou, en désignant par ζ la quantité sous le signe,

$$(1) \quad S = ab \iint \zeta d\eta d\mu,$$

les intégrations devant être étendues à toutes les valeurs positives de x et de y qui satisfont à l'inégalité

$$\eta^2 + \mu^2 \leq 1.$$

Or, si l'on remarque que $\iint \zeta d\eta d\mu$ représente un solide dont l'élément infiniment petit est le parallélépipède ayant le rectangle $d\eta d\mu$ pour base et ζ pour hauteur, on voit que l'on pourra considérer cette intégrale comme représentant le volume de la portion du cylindre $\eta^2 + \mu^2 = 1$, comprise entre les parties positives des plans coordonnés et la surface dont l'équation est

$$\zeta^2 = \frac{1 - \alpha^2 \eta^2 - \epsilon^2 \mu^2}{1 - \eta^2 - \mu^2};$$

et, si après avoir mis cette équation sous la forme,

$$(2) \quad (\zeta^2 - \alpha^2) \eta^2 + (\zeta^2 + \epsilon^2) \mu^2 = \zeta^2 - 1,$$

on y regarde μ comme un paramètre variable, on en conclura que tout plan perpendiculaire à l'axe du cylindre et situé à une distance plus grande que l'unité de l'origine, coupe la surface suivant une ellipse ayant pour projection, sur le plan des xy , une ellipse égale dont l'équation est celle (2). Pour $\zeta = 1$, cette projection est l'origine des coordonnées; et, si à partir de cette limite, on fait croître ζ indéfiniment, on obtiendra une série d'ellipses concentriques ayant leurs axes situés suivant ceux des x et des y , et dont la limite répondant à $\zeta = \infty$ est le cercle représenté par l'équation $\eta^2 + \mu^2 = 1$. Il en résulte que l'on pourra prendre, pour l'élément du volume considéré, le cylindre ayant pour hauteur ζ et pour base la couronne comprise entre les deux ellipses consécutives déterminées en attribuant dans l'équation (2), au paramètre ξ , deux valeurs infiniment voisines ζ et $\xi + d\zeta$. En désignant par X et Y les deux demi-axes de la première ellipse, la couronne aura pour mesure

$$\pi dXY,$$

et, comme on ne doit prendre que le quart du volume dont cette couronne est la base, on pourra remplacer l'intégrale (1) par la suivante :

$$S = \frac{\pi}{4} ab \int_0^\infty \zeta dXY.$$

Mais l'équation (2) donne

$$X = \sqrt{\frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 - a^2}}, \quad Y = \sqrt{\frac{\zeta^2 - 1}{\zeta^2 - b^2}}.$$

Donc

$$\begin{aligned} S &= \frac{\pi}{4} ab \int_1^\infty \zeta dXY = \frac{\pi}{4} ab \left[XY\zeta - \int_1^\infty XY d\zeta \right] \\ &= \frac{\pi}{4} ab \left[\frac{\zeta(\zeta^2 - 1)}{\sqrt{(\zeta^2 - a^2)(\zeta^2 - b^2)}} - \int_1^\infty \frac{(\zeta^2 - 1) d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2 - a^2)(\zeta^2 - b^2)}} \right] \end{aligned}$$

L'intégrale double proposée étant ainsi ramenée à une intégrale simple :

$$(a) \quad \int_1^{\infty} \frac{(\zeta^2 - 1) d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2 - \alpha^2)(\zeta^2 - \beta^2)}},$$

tout se réduit à déterminer cette intégrale définie. Or, si l'on pose

$$\zeta = \frac{\alpha}{\sin \varphi}; \quad \text{d'où } d\zeta = -\frac{\alpha \cos \varphi}{\sin^2 \varphi} d\varphi,$$

l'expression différentielle

$$-\frac{(\zeta^2 - 1) d\zeta}{\sqrt{(\zeta^2 - \alpha^2)(\zeta^2 - \beta^2)}}$$

deviendra

$$\left(\frac{\alpha^2}{\sin^2 \varphi} - 1 \right) \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} \sin^2 \varphi} = \left[\frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \sin^2 \varphi}}{\sin^2 \varphi} - \frac{1 - \beta^2}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \sin^2 \varphi}} \right] d\varphi,$$

et l'on aura pour la transformée de (a)

$$\int \frac{d\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \sin^2 \varphi}}{\sin^2 \varphi} - (1 - \beta^2) \int \frac{d\varphi}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \sin^2 \varphi}},$$

expression dans laquelle les intégrales qui y figurent doivent être prises depuis $\sin \varphi = \alpha$ jusqu'à $\sin \varphi = 0$. En renversant ces limites, et posant, pour abréger, $\frac{\beta}{\alpha} = k$, $\alpha = \sin \xi$, cette expression se changera en celle

$$\frac{1 - \beta^2}{\alpha} \int_0^{\xi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} - \alpha \int_0^{\xi} \frac{d\varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}{\sin^2 \varphi},$$

qui donne par l'intégration par parties

$$\frac{1 - \beta^2}{\alpha} \int_0^{\xi} \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} + \alpha \cot \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} + \alpha k \int_0^{\xi} \frac{\cos^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}$$

ou

$$\begin{aligned} & \alpha \cot \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} + \frac{1}{\alpha} \int_0^\xi \frac{1 - \alpha^2 k^2 \sin^2 \varphi d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}} \\ &= \alpha \cot \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} + \alpha \int_0^\xi \sqrt{(1 - k^2 \sin^2 \varphi)} d\varphi \\ & \quad + \frac{1 - \alpha^2}{\alpha} \int_0^\xi \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}}, \end{aligned}$$

ou, d'après les notations de Legendre,

$$\alpha \cot \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} + \alpha E(k\xi) + \left(\frac{1 - \alpha^2}{\alpha} \right) F(k\xi).$$

Il reste maintenant à évaluer entre les limites relatives à chacune des variables ξ , φ , la somme des quantités

$$\frac{(\xi^2 - 1)\xi}{\sqrt{(\xi^2 - \alpha^2)(\xi^2 - \beta^2)}}, \quad \alpha \cot \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi}.$$

En exprimant la première en fonction de φ , il s'agira de chercher entre les limites $\varphi = 0$ et $\sin \varphi = \alpha$, la différence

$$\begin{aligned} & \alpha \cot \varphi \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \varphi} - \frac{\alpha^2 - \sin^2 \varphi}{\sin \varphi \cos \varphi \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \sin^2 \varphi}} \\ &= \frac{(1 - \alpha^2 - \beta^2 \cos^2 \varphi) \sin \varphi}{\cos \varphi \sqrt{\alpha^2 - \beta^2 \sin^2 \varphi}}; \end{aligned}$$

et comme cette valeur devient nulle à la première limite $\varphi = 0$, on voit qu'il faudra seulement y substituer $\sin \varphi = \alpha$, ce qui la changera en

$$\frac{(1 - \alpha^2)(1 - \beta^2)\alpha}{\alpha \sqrt{(1 - \alpha^2)} \sqrt{(1 - \beta^2)}} = \sqrt{(1 - \alpha^2)(1 - \beta^2)}.$$

Pour la surface entière de l'ellipsoïde, on aura donc

$$S = 2\pi ab \left[\sqrt{(1 - \alpha^2)} \sqrt{(1 - \beta^2)} + \alpha E(k\xi) + \frac{1 - \alpha^2}{\alpha} F(k\xi) \right],$$

ou

$$S = 2\pi c^3 \frac{2\pi b}{\sqrt{a^3 - c^3}} \left[(a^3 - c^3) E(k\xi) + c^3 F(k\xi) \right],$$

formule qui ne diffère pas de celle donnée par Legendre dans ses *Exercices de calcul intégral*. Pour l'appliquer, on doit se rappeler que

$$k^2 = \frac{6^2}{a^2} = \frac{a^2(b^2 - c^2)}{b^2(a^3 - c^3)},$$

$$\sin \xi = \frac{6}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - c^2}}{a}, \quad \cos \xi = \frac{c}{a}.$$

93. Considérons, en second lieu, l'intégrale triple

$$(1) \quad S = \int \int \int \sqrt{\frac{1 - \alpha^2 x^2 - 6^2 y^2 - \gamma^2 z^2}{1 - x^2 - y^2 - z^2}} dx dy dz$$

dans laquelle α , 6 , γ , sont des constantes positives moindres que l'unité, et x , y , z , des variables liées entre elles par la condition

$$(2) \quad x^2 + y^2 + z^2 < 1.$$

Posons

$$(3) \quad v^2 = \frac{1 - \alpha^2 x^2 - 6^2 y^2 - \gamma^2 z^2}{1 - x^2 - y^2 - z^2},$$

équation que l'on peut mettre sous la forme

$$(v^2 - \alpha^2)x^2 + (v^2 - 6^2)y^2 + (v^2 - \gamma^2)z^2 = v^2 - 1,$$

ou sous celle

$$(4) \quad \frac{v^2 - \alpha^2}{v^2 - 1} x^2 + \frac{v^2 - 6^2}{v^2 - 1} y^2 + \frac{v^2 - \gamma^2}{v^2 - 1} z^2 = 1,$$

et qui n'est pas contradictoire avec la condition (2). En appelant V un volume qui, ayant pour élément $dx dy dz$, est exprimé par

$$V = \int \int \int dx dy dz,$$

on aura

$$S = \int v dV,$$

ou par ce qu'aux limites

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1,$$

correspondent

$$v = 1, \quad v = \infty,$$

$$(5) \quad S = \int_1^{\infty} v dV.$$

Ainsi, il s'agira d'évaluer dV . Or, les variables x, y, z , devant vérifier constamment l'équation (4), qui est celle d'un ellipsoïde ayant ses trois demi-axes X, Y, Z respectivement égaux à

$$X = \sqrt{\frac{v^2 - 1}{v^2 - \alpha^2}}, \quad Y = \sqrt{\frac{v^2 - 1}{v^2 - \beta^2}}, \quad Z = \sqrt{\frac{v^2 - 1}{v^2 - \gamma^2}},$$

le volume V ne pourra être que la huitième partie du volume de cet ellipsoïde, ou $\frac{\pi}{6} XYZ$. L'intégrale (5) devra donc être remplacée par la suivante :

$$S = \frac{\pi}{6} \int_1^{\infty} v dXYZ.$$

Mais

$$dXYZ = \frac{v dv \sqrt{v^2 - 1}}{\sqrt{(v^2 - \alpha^2)(v^2 - \beta^2)(v^2 - \gamma^2)}} \left(\frac{1 - \alpha^2}{v^3 - \alpha^2} + \frac{1 - \beta^2}{v^3 - \beta^2} + \frac{1 - \gamma^2}{v^3 - \gamma^2} \right).$$

Donc

$$\begin{aligned} S = \frac{\pi}{6} & \left[(1 - \alpha^2) \int_1^{\infty} \frac{v^2 dv \sqrt{v^2 - 1}}{(v^2 - \alpha^2) \sqrt{(v^2 - \alpha^2)(v^2 - \beta^2)(v^2 - \gamma^2)}} \right. \\ & + (1 - \beta^2) \int_1^{\infty} \frac{v^2 dv \sqrt{v^2 - 1}}{(v^2 - \beta^2) \sqrt{(v^2 - \alpha^2)(v^2 - \beta^2)(v^2 - \gamma^2)}} \\ & \left. + (1 - \gamma^2) \int_1^{\infty} \frac{v^2 dv \sqrt{v^2 - 1}}{(v^2 - \gamma^2) \sqrt{(v^2 - \alpha^2)(v^2 - \beta^2)(v^2 - \gamma^2)}} \right]. \end{aligned}$$

En posant, pour abréger,

$$\sigma = \int_1^v \frac{v^2 dv \sqrt{v^2 - 1}}{\sqrt{(v^2 - \alpha^2)(v^2 - \epsilon^2)(v^2 - \gamma^2)}},$$

on trouve

$$S = \frac{\pi}{6} \left(\frac{1 - \alpha^2}{\alpha} \frac{d\sigma}{d\alpha} + \frac{1 - \epsilon^2}{\epsilon} \frac{d\sigma}{d\epsilon} + \frac{1 - \gamma^2}{\gamma} \frac{d\sigma}{d\gamma} \right).$$

L'intégrale triple proposée sera ainsi réduite à une intégrale simple qu'il s'agira d'évaluer.

94. Considérons enfin l'intégrale multiple d'ordre n

$$(1) \quad S = \int \int \int \dots \sqrt{\frac{1 - \alpha^2 x^2 - \epsilon^2 y^2 - \gamma^2 z^2 - \dots}{1 - x^2 - y^2 - z^2 - \dots}} dx dy dz \dots$$

dans laquelle α, ϵ, γ sont des constantes positives moindres que l'unité, et $x, y, z \dots$ des variables positives qui doivent satisfaire à la condition

$$(2) \quad x^2 + y^2 + z^2 + \dots \leq 1.$$

Posons

$$v = \frac{1 - \alpha^2 x^2 - \epsilon^2 y^2 - \gamma^2 z^2 - \dots}{1 - x^2 - y^2 - z^2 - \dots},$$

et cherchons à calculer l'intégrale multiple

$$\int \int \int dx dy dz \dots$$

en donnant à x, y, z toutes les valeurs propres à vérifier la condition

$$(v^2 - \alpha^2)x^2 + (v^2 - \epsilon^2)y^2 + (v^2 - \gamma^2)z^2 + \dots \leq v^2 - 1,$$

ou celle

$$(3) \quad \frac{(v^2 - \alpha^2)}{v^2 - 1} x^2 + \frac{(v^2 - \epsilon^2)}{v^2 - 1} y^2 + \frac{(v^2 - \gamma^2)}{v^2 - 1} z^2 + \dots \leq 1$$

qui n'est pas contradictoire avec la première, puisque chacun des rapports dont est formée cette équation est plus grand que l'unité. Nous obtiendrons de la sorte une intégrale définie fonction de v , α , β , γ , que nous pourrons représenter par $F(v)$.

Cela posé, attribuons maintenant à v un accroissement infiniment petit dv et soit $v' = v + dv$. Calculons l'intégrale $\int \int \int \dots dx dy dz \dots$ entre les nouvelles limites qui se déduisent de l'équation (3), en remplaçant dans cette équation v par v' ; puis retranchons le premier résultat du second. La différence $dF(v)$ sera évidemment égale à la somme des valeurs que prend la fonction $dx dy dz \dots$ lorsque les variables satisfont à la condition (3) et que, dans cette équation, le paramètre v passe de v à $v + dv$; par conséquent on pourra regarder le produit $v dF(v)$ comme exprimant, dans l'intégrale (1), la partie que l'on obtiendrait en faisant croître le radical de v à $v + dv$. Mais aux limites

$$x^2 + y^2 + z^2 + \dots = 0,$$

$$x^2 + y^2 + z^2 + \dots = 1,$$

correspondent $v = 1$ et $v = \infty$. Donc, pour déterminer la valeur de l'intégrale $\int$, il suffira de prendre la somme des valeurs qu'acquiert $v dF(v)$, lorsque v , croissant par degrés infiniment petits, passe de la valeur $v = 1$ à celle $v = \infty$. En d'autres termes, si l'on pose

$$F(v) = \int \int \int \dots dx dy dz \dots,$$

les limites de l'intégrale étant données par l'équation (3), on aura

$$\int \int \int \dots \sqrt{\frac{1 - \alpha^2 x^2 - \beta^2 y^2 - \gamma^2 z^2 - \dots}{1 - x^2 - y^2 - z^2 - \dots}} dx dy dz = \int_0^\infty v dF(v),$$

les limites de la première intégrale étant déterminées par la condition

$$x^2 + y^2 + z^2 + \dots \leq 1.$$

Il reste donc à déterminer la fonction $F(v)$. Or, c'est ce qu'il est facile de faire au moyen de la formule suivante qui est celle de Lejeune-Dirichlet

$$\begin{aligned} & \int \int \int \dots x^{p-1} y^{q-1} z^{r-1} \dots dx dy dz \\ &= \frac{a^p b^q c^r \dots}{k, l, m} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{k}\right) \Gamma\left(\frac{q}{l}\right) \Gamma\left(\frac{r}{m}\right) \dots}{\Gamma\left(1 + \frac{p}{k} + \frac{q}{l} + \frac{r}{m} + \dots\right)}, \end{aligned}$$

et dans laquelle, comme on l'a vu n° (90), $a, b, c, \dots p, q, r, \dots k, l, m, \dots$ représentent des constantes positives, et $x, y, z, \dots$ des variables qui doivent prendre toutes les valeurs positives qui satisfont à la condition

$$\left(\frac{x}{a}\right)^k + \left(\frac{y}{b}\right)^l + \left(\frac{z}{c}\right)^m + \dots \leq 1.$$

En mettant, en effet, la condition (3) sous la forme

$$\left(\frac{x}{\sqrt{\frac{v^2-1}{v^2-a^2}}}\right)^2 + \left(\frac{y}{\sqrt{\frac{v^2-1}{v^2-b^2}}}\right)^2 + \left(\frac{z}{\sqrt{\frac{v^2-1}{v^2-\gamma^2}}}\right)^2 + \dots \leq 1,$$

et comparant avec la précédente, on en déduit

$$\begin{aligned} p &= q = r = 1, \\ k &= l = m = 2, \\ a &= \sqrt{\frac{v^2-1}{v^2-a^2}}, \quad b = \sqrt{\frac{v^2-1}{v^2-b^2}}, \quad c = \sqrt{\frac{v^2-1}{v^2-\gamma^2}} \dots \end{aligned}$$

Substituant dans la formule de Dirichlet, et ayant égard à ce que $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$, on a donc

$$\begin{aligned} F(v) &= \int \int \int \dots dx dy dz \\ &= \frac{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^n}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)} \sqrt{\frac{(v^2-1)}{(v^2-a^2)} \frac{(v^2-1)}{(v^2-b^2)} \dots}, \end{aligned}$$

et, par suite,

$$S = \frac{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^n}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)} \int_1^\infty v d \sqrt{\frac{(v^2-1)}{(v^2-a^2)} \frac{(v^2-1)}{(v^2-b^2)} \dots}$$

En effectuant la différentiation indiquée, on trouve

$$\begin{aligned} S &= \frac{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^n}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)} \int_1^\infty \frac{v^2(v^2-1)^{\frac{n}{2}-1} dv}{\sqrt{(v^2-a^2)} (v^2-b^2) (v^2-\gamma^2) \dots} \\ &\quad \times \left(\frac{1-a^2}{v^2-a^2} + \frac{1-b^2}{v^2-b^2} + \dots \right). \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où $\alpha = \beta = \gamma$, on a

$$\begin{aligned} S &= \int \int \int \dots \sqrt{\frac{1-\alpha^2(x^2+y^2+z^2+\dots)}{1-(x^2+y^2+z^2+\dots)}} dx dy dz \dots \\ &= n(1-\alpha^2) \frac{\left(\frac{\sqrt{\pi}}{2}\right)^n}{\Gamma\left(1 + \frac{n}{2}\right)} \int_0^\infty \frac{v^2(v^2-1)^{\frac{n}{2}-1} dv}{(v^2-\alpha^2)^{\frac{n}{2}-1}}, \end{aligned}$$

résultat qui méritait d'être remarqué.

Maintenant, si l'on pose

$$v^2-1 = (v^2-\alpha^2) \sin^2 \theta,$$

où

$$P = (1-x_1)^{\mu_1-1} (1-x_2)^{\mu_2-1} (1-x_3)^{\mu_3-1} \dots (1-x_n)^{\mu_n-1}$$

et

$$Q = x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_1+\mu_2} x_3^{\mu_1+\mu_2+\mu_3} x_n^{\mu_1+\mu_2+\mu_3+\dots+\mu_{n-1}},$$

$x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$ sont des variables qui croissent de 0 à 1, et $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \dots, \mu_n$ des constantes positives ou du moins à partie réelle positive.

Considérons le cas le plus simple qui est celui où $n=2$. On a alors une intégrale double, et il s'agit de prouver que

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} & \int_0^1 \int_0^1 F(xy) (1-x)^{\mu-1} y^{\mu} (1-y)^{\nu-1} dx dy \\ &= \frac{\Gamma(\mu) \Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)} \int_0^1 F(z) (1-z)^{\mu+\nu-1} dz. \end{aligned} \right.$$

Posons

$$y = \frac{z}{x};$$

par cette valeur le premier membre de l'intégrale qui précède se changera en

$$\int_0^1 dx \int_0^x F(z) (1-x)^{\mu-1} x^{\mu} \left(1 - \frac{z}{x}\right)^{\nu-1} \frac{dx}{x^{\mu+1}},$$

et en regardant x et z comme deux coordonnées rectangulaires dans un plan, et l'intégrale double qui précède comme l'expression d'un volume, cette intégrale pourra être remplacée par la suivante :

$$\int_0^1 F(z) z^{\mu} dz \int_z^1 (1-x)^{\mu-1} \left(1 - \frac{z}{x}\right)^{\nu-1} \frac{dx}{x^{\mu+1}},$$

où l'ordre des intégrations a été interverti. Tout se réduit donc à prouver que

$$z^{\mu} \int_z^1 (1-x)^{\mu-1} \left(1 - \frac{z}{x}\right)^{\nu-1} \frac{dx}{x^{\mu+1}} = \frac{\Gamma(\mu) \Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)} (1-z)^{\mu+\nu-1}.$$

Or, si l'on pose

$$x = \frac{z}{1 - (1-z)t},$$

t désignant une nouvelle variable dont les limites sont 0 et 1, on aura

$$1-x = \frac{(1-z)(1-t)}{1-(1-z)t}, \quad 1-\frac{z}{x} = (1-z)t,$$

$$dx = \frac{z(1-z)dt}{[1-(1-z)t]^2},$$

et, par suite,

$$z^\mu \int_0^1 (1-x)^{\mu-1} \left(1-\frac{z}{x}\right)^{\nu-1} \frac{dx}{x^{\mu+1}} = (1-z)^{\mu+\nu-1} \int_0^1 t^{\nu-1} (1-t)^{\mu-1} dt.$$

Mais n° (74)

$$\int_0^1 t^{\nu-1} (1-t)^{\mu-1} dt = \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)}.$$

Donc

$$z^\mu \int_0^1 (1-x)^{\mu-1} \left(1-\frac{z}{x}\right)^{\nu-1} \frac{dx}{x^{\mu+1}} = \frac{\Gamma(\mu)\Gamma(\nu)}{\Gamma(\mu+\nu)} (1-z)^{\mu+\nu-1}.$$

Considérons maintenant le cas de $n = 3$, qui correspond à celui où l'on a l'intégrale triple :

$$S = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 F(x_1 x_2 x_3) (1-x_1)^{\mu_1-1} (1-x_2)^{\mu_2-1} (1-x_3)^{\mu_3-1} x_1^{\mu_1} x_2^{\mu_2} x_3^{\mu_3} dx_1 dx_2 dx_3,$$

ou

$$S = \int_0^1 \int_0^1 F(x_1 x_2) (1-x_1)^{\mu_1-1} (1-x_2)^{\mu_2-1} x_1^{\mu_1} dx_1 dx_2 \int_0^1 F(x_3) (1-x_3)^{\mu_3-1} x_3^{\mu_3} dx_3.$$

En appliquant à l'intégrale double du second membre la

formule (2) qui vient d'être démontrée, on réduira cette intégrale triple, à celle double

$$S = \frac{\Gamma(\mu_1)\Gamma(\mu_2)}{\Gamma(\mu_1+\mu_2)} \int_0^1 \int_0^1 F(x_1)(1-x_1)^{\mu_1+\mu_2-1} x_1^{\mu_1+\mu_2-1} (1-x_1)^{\mu_2-1} dx_1,$$

La formule (2) est encore applicable au second membre de cette expression et donne

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 F(x_1)(1-x_1)^{\mu_1+\mu_2-1} x_1^{\mu_1+\mu_2-1} (1-x_1)^{\mu_2-1} dx_1 \\ = \frac{\Gamma(\mu_1+\mu_2)\Gamma(\mu_2)}{\Gamma(\mu_1+\mu_2+\mu_2)} \int_0^1 F(x)(1-x)^{\mu_1+\mu_2+\mu_2-1} dx. \end{aligned}$$

On a donc

$$S = \frac{\Gamma(\mu_1)\Gamma(\mu_2)}{\Gamma(\mu_1+\mu_2)} \cdot \frac{\Gamma(\mu_1+\mu_2)\Gamma(\mu_2)}{\Gamma(\mu_1+\mu_2+\mu_2)} \int_0^1 F(x)(1-x)^{\mu_1+\mu_2+\mu_2-1} dx.$$

et, par conséquent,

$$S = \frac{\Gamma(\mu_1)\Gamma(\mu_2)\Gamma(\mu_2)}{\Gamma(\mu_1+\mu_2+\mu_2)} \int_0^1 F(x)(1-x)^{\mu_1+\mu_2+\mu_2-1} dx.$$

On ramènerait de la même manière le cas d'une intégrale quadruple à celui d'une intégrale triple; le cas d'une intégrale quintuple à celui d'une intégrale quadruple, et, ainsi de suite. En général, on peut donc écrire la formule suivante qui est celle (1)

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \dots F(x_1, x_2, x_3, \dots) PQ dx_1 dx_2 dx_3 \dots \\ = \frac{\Gamma(\mu_1)\Gamma(\mu_2)\Gamma(\mu_2)}{\Gamma(\mu_1+\mu_2+\mu_2+\dots)} \int_0^1 F(x)(1-x)^{(\mu_1+\mu_2+\mu_2+\dots)-1} dx, \end{aligned}$$

laquelle se trouve ainsi démontrée.

96. Si dans cette formule, on suppose que $F(x)$ soit une fonction de la forme

$$F(x) = \frac{x^{\mu-1}}{(1+kx)^p},$$

μ, k, p étant des constantes, cette formule deviendra

$$\begin{aligned} S &= \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{x_1^{\mu-1} x_2^{\mu+\mu_1-1} x_n^{\mu+\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_{n-1}-1} (1-x_1)^{\mu_1-1} \dots (1-x_n)^{\mu_n-1} dx_1 dx_2 \dots dx_n}{(1+kx_1 x_2 \dots x_n)^p} \\ &= \frac{\Gamma(\mu_1) \Gamma(\mu_2) \dots \Gamma(\mu_n)}{\Gamma(\mu+\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_n)} \int_0^1 \frac{x^{\mu-1} (1-x)^{(\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_n)-1} dx}{(1+kx)^p} \end{aligned}$$

et ramènera ainsi l'intégrale multiple S à l'intégrale trinôme

$$\int_0^1 \frac{x^{\mu-1} (1-x)^{(\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_n)-1} dx}{(1+kx)^p},$$

qui, dans quelque cas, peut s'exprimer sous une forme finie. Cela a lieu, par exemple, lorsque

$$p = \mu + \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n;$$

car en posant alors

$$x = \frac{1-t}{1+kt},$$

on obtient

$$\int_0^1 \frac{x^{\mu-1} (1-x)^{(\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_n)-1}}{(1+kx)^{\mu+\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_n}} dx = \frac{\Gamma(\mu) \Gamma(\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n)}{\Gamma(\mu + \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n) \Gamma(1+k)},$$

et, par suite,

$$(5) \left\{ \begin{aligned} S &= \int_0^1 \int_0^1 \dots \int_0^1 \frac{x_1^{\mu-1} x_2^{\mu+\mu_1-1} x_n^{\mu+\mu_1+\mu_2+\dots+\mu_{n-1}-1} (1-x_1)^{\mu_1-1} \dots (1-x_n)^{\mu_n-1} dx_1 dx_2 \dots dx_n}{(1+kx_1 x_2 \dots x_n)^p} \\ &= \frac{\Gamma(\mu) \Gamma(\mu_1) \Gamma(\mu_2) \dots \Gamma(\mu_n)}{(1+k)^p \Gamma(\mu + \mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n)} \end{aligned} \right.$$

Dans le cas de $n = 2$, cette formule donne

$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{x_1^{\mu-1} x_2^{\mu+\mu_1-1} (1-x_1)^{\mu_1-1} (1-x_2)^{\mu_1-1} dx_1 dx_2}{(1+kx_1x_2)^{\mu+\mu_1+\mu_2}}$$

$$= \frac{\Gamma(\mu) \Gamma(\mu_1) \Gamma(\mu_2)}{(1+k)^{\mu} \Gamma(\mu+\mu_1+\mu_2)};$$

dans celui de $n = 3$

$$\int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 \frac{x_1^{\mu-1} x_2^{\mu+\mu_1-1} x_3^{\mu+\mu_1+\mu_2-1} (1-x_1)^{\mu_1-1} (1-x_2)^{\mu_1-1} (1-x_3)^{\mu_2-1} dx_1 dx_2 dx_3}{(1+kx_1x_2x_3)^{\mu+\mu_1+\mu_2+\mu_3}}$$

$$= \frac{\Gamma(\mu) \Gamma(\mu_1) \Gamma(\mu_2) \Gamma(\mu_3)}{(1+k)^{\mu} \Gamma(\mu+\mu_1+\mu_2+\mu_3)};$$

et, ainsi de suite.

97. FORMULE DE M. O. SCHLOMILCH. — On doit à M. Schlo-
milch la réduction de l'intégrale multiple

$$(1) S = \int \int \int \dots F(x^2+y^2+z^2+\dots) \varphi(ax+by+cz+\dots) dx dy dz \dots$$

dans laquelle les intégrations doivent être étendues à toutes
les valeurs positives et négatives des variables $x, y, z \dots$ qui
satisfont à l'une ou à l'autre des inégalités

$$0 < x^2 + y^2 + z^2 + \dots < 1$$

$$\sigma_1 < ax + by + cz + \dots < \sigma_2$$

et même simultanément à toutes les deux.

Pour montrer de quelle manière peut se faire cette réduction,
considérons, en premier lieu, l'intégrale double corres-
pondante au cas de $n = 2$, savoir :

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(k^2+u^2+v^2) \varphi(\alpha+\epsilon u+\gamma v) du dv.$$

Posons

$$u = r \cos \theta, \quad v = r \sin \theta;$$

par ces valeurs l'expression précédente de S deviendra

$$S = \int_0^{\infty} \int_0^{2\pi} F(k^2+r^2) \varphi(\alpha+\epsilon r \cos \theta + \gamma r \sin \theta) r dr d\theta,$$

et, en faisant usage de la formule connue,

$$\int_0^{2\pi} f(a \cos \theta + b \sin \theta) d\theta = 2 \int_0^{\pi} f(\sqrt{a^2 + b^2} \cos \theta) d\theta,$$

on aura

$$S = 2 \int_0^{\infty} \int_0^{\pi} F(k + r^2) \varphi(a + \sqrt{b^2 + c^2} r \cos \theta) r dr d\theta.$$

En remettant maintenant, dans cette dernière, pour $r \cos \theta$ et $r \sin \theta$ leurs valeurs u et v , on obtiendra la transformée

$$(2) \quad \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(k^2 + u^2 + v^2) \varphi(a + bu + cv) du dv \\ = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(k^2 + u^2 + v^2) \varphi(a + \sqrt{b^2 + c^2} u) du dv \end{cases}$$

Considérons ensuite l'intégrale triple

$$S = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x^2 + y^2 + z^2) \varphi(ax + by + cz) dx dy dz$$

En appliquant la formule de réduction (1) qui précède, et posant pour cela

$$k = x, \quad u = y, \quad v = z, \quad a = ax, \quad b = b, \quad c = c,$$

on trouvera

$$S = 2 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x^2 + y^2 + z^2) \varphi(ax + \sqrt{b^2 + c^2} y) dx dy dz,$$

et la formule de réduction (2) étant encore applicable au second membre de cette dernière équation, on aura

$$S = 4 \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(x^2 + y^2 + z^2) \varphi(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2} x) dx dy dz.$$

On transformerait de la même manière les intégrales quadruples, quintuples et de même forme que les précédentes.

En général, si l'on désigne par n le nombre des variables $x, y, z, \dots$, et par ρ le radical $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + \dots}$, on aura, pour la transformée de l'intégrale multiple (1)

$$(3) \begin{cases} S = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots F(x^2 + y^2 + z^2 + \dots) \varphi(ax + by + cz + \dots) dx dy dz \dots \\ = 2^{n-1} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \dots F(x^2 + y^2 + z^2 + \dots) \varphi(\rho x) dx dy dz \dots \end{cases}$$

Maintenant, si pour réduire l'intégrale multiple du second membre relative aux variables $x, y, z, \dots$, on fait usage de la formule connue

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \dots F(u^2 + v^2 + \dots) du dv = \frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{2^{m-1} \Gamma\left(\frac{m}{2}\right)} \int_0^{\infty} y^{m-1} F(y^2) dy$$

dans laquelle m désigne le nombre des variables $u, v, \dots$, on obtiendra, pour la valeur de l'intégrale multiple S , l'expression remarquable suivante :

$$(4) \begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \dots F(x^2 + y^2 + z^2 + \dots) \varphi(ax + by + cz + \dots) dx dy dz \\ = \frac{2^{\frac{n-1}{2}} \pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{-\infty}^{\infty} \int_0^{\infty} F(x^2 + y^2) \varphi(\rho x) y^{n-2} dx dy \end{cases}$$

Examinons actuellement les cas où les intégrations doivent être étendues à toutes les valeurs positives et négatives de $x, y, z, \dots$ qui satisfont à l'une ou à l'autre des deux inégalités

$$\begin{aligned} 0 < x^2 + y^2 + z^2 + \dots < 1, \\ \sigma_1 < ax + bx + cz + \dots < \sigma_2, \end{aligned}$$

ou en même temps à toutes les deux.

Supposons d'abord que dans la formule (4), on remplace la fonction $F(t)$ par une autre qui coïncide avec cette fonc-

tion quand $t < 1$, et qui se réduise à zéro dans le cas contraire. Alors, les intégrations, dans le premier membre, s'étendront à toutes les valeurs positives et négatives de x, y, z qui satisfont à l'inégalité

$$0 < x^2 + y^2 + z^2 + \dots < 1;$$

et dans le second membre, les deux intégrations qu'il renferme, se rapporteront à toutes les valeurs positives et négatives de x , et à toutes les valeurs positives de y qui satisfont à la condition

$$0 < x^2 + y^2 < 1.$$

Donc, dans ce cas

$$(5) \quad \left\{ \begin{array}{l} \iint \dots F(x^2 + y^2 + z^2 + \dots) \varphi(ax + by + cz + \dots) dx dy dz \dots \\ = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{-1}^{+1} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} F(x^2 + y^2) \varphi(\rho x) y^{n-2} dx dy \end{array} \right.$$

Supposons ensuite que, dans la formule (1), la fonction $\varphi(s)$ soit telle qu'elle se réduise à zéro pour toutes les valeurs de s non comprises dans l'intervalle de $s = \sigma_1$ à $s = \sigma_2$; alors on aura pour l'intégrale S , étendue à toutes les valeurs positives et négatives de x, y, z qui satisfont à l'inégalité

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 < ax + by + cz + \dots < \sigma_2, \\ \iint \dots F(x^2 + y^2 + z^2 + \dots) \varphi(ax + by + cz + \dots) dx dy dz \\ = \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{\frac{\sigma_1}{\rho}}^{\frac{\sigma_2}{\rho}} \int_0^{\infty} F(x^2 + y^2) \varphi(\rho x) y^{n-2} dx dy \end{array} \right.$$

Enfin, si les intégrations doivent être étendues à toutes les valeurs positives et négatives des variables $x, y, z \dots$ qui satisfont en même temps aux deux inégalités

$$\begin{array}{l} 0 < x^2 + y^2 + z^2 + \dots < 1, \\ \sigma_1 < ax + by + cz + \dots < \sigma_2, \end{array}$$

il faudra aussi que l'on ait au second membre

$$-1 < x < +1, \quad 0 < y < \sqrt{1-x^2},$$

et, en même temps,

$$\frac{\sigma_1}{\rho} < x < \frac{\sigma_2}{\rho}, \quad 0 < y < \infty.$$

Donc, dans ce cas,

$$(7) \left\{ \begin{aligned} & \int \int \int \dots F(x^2 + y^2 + z^2 + \dots) \varphi(ax + by + cz + \dots) dx dy dz \dots \\ &= \frac{2\pi^{\frac{n-1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)} \int_{x_1}^{x_2} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} F(x^2 + y^2) \varphi(\rho x) y^{n-2} dx dy, \end{aligned} \right.$$

les valeurs de x_1 et x_2 étant

$$x_1 = \frac{\sigma_1}{\rho} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{\sigma_2}{\rho} \quad \text{lorsque} \quad -1 < \frac{\sigma_1}{\rho} < \frac{\sigma_2}{\rho} < +1,$$

$$x_1 = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{\sigma_2}{\rho} \quad \text{lorsque} \quad -1 > \frac{\sigma_1}{\rho} < \frac{\sigma_2}{\rho} < +1,$$

$$x_1 = \frac{\sigma_1}{\rho} \quad \text{et} \quad x_2 = +1 \quad \text{lorsque} \quad -1 > \frac{\sigma_1}{\rho} < \frac{\sigma_2}{\rho} > +1,$$

$$x_1 = -1 \quad \text{et} \quad x_2 = +1 \quad \text{lorsque} \quad -1 > \frac{\sigma_1}{\rho} < \frac{\sigma_2}{\rho} > +1.$$

On obtiendrait des formules beaucoup plus générales que celles (5), (6) et (7), en remplaçant dans ces formules x, y, z par $\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta}, \frac{z}{\gamma}, \dots$; et $a, b, c \dots$ par les produits $\alpha a, \beta b, \gamma c \dots$, ce qui donne

$$\rho = \sqrt{\alpha^2 a^2 + \beta^2 b^2 + \gamma^2 c^2 + \dots}$$

et

$$0 < \left(\frac{x}{\alpha}\right)^2 + \left(\frac{y}{\beta}\right)^2 + \left(\frac{z}{\gamma}\right)^2 + \dots < 1,$$

$$\sigma_1 < \alpha x + \beta y + \gamma z + \dots < \sigma_2 \dots$$

98. Dans le cas où

$$n=3; \quad F(t) = F\left(\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c}\right) = 1, \quad \varphi(s) = \varphi(ax + by + cz) = 1,$$

$$\sigma_1 = \mu < 1, \quad \sigma_2 = 1,$$

l'intégrale triple

$$V = \iiint dx dy dz,$$

étendue à toutes les valeurs positives et négatives de x, y, z qui satisfont simultanément aux deux inégalités

$$0 < \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 < 1,$$

$$\mu < ax + by + cz < 1,$$

représente le volume de la portion d'un ellipsoïde

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

comprise entre les deux plans parallèles dont les équations sont

$$ax + by + cz = \mu,$$

$$ax + by + cz = 1;$$

et, en appliquant la formule (7), on trouve que cette portion de volume est exprimée par

$$2\pi abc \int_{\frac{\mu}{\rho}}^{\frac{1}{\rho}} \int_0^{\sqrt{1-x^2}} y dx dy = \pi abc \left(\frac{1-\mu}{\rho} - \frac{1}{3} \frac{1-\mu^3}{\rho^3} \right)$$

ρ étant égal à $\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.

99. En posant dans la formule (5)

$$n = 3, F(x^2 + y^2 + z^2) = 1$$

et

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta \cos \psi, \quad z = r \sin \theta \sin \psi.$$

on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \varphi(ar \cos \theta + br \sin \theta \cos \psi + cr \sin \theta \sin \psi) r^2 \sin \theta dr d\theta d\psi \\ = \pi \int_{-1}^{+1} (1 - x^2) \varphi(\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}, x) dx. \end{aligned}$$

100. De cette formule se déduit immédiatement un théorème très-important démontré la première fois par Poisson. Posons

$$\int_0^1 x^2 \varphi(\rho x) dx = f(\rho)$$

ou

$$\int_0^\mu t^2 \varphi(t) dt = \mu^2 f(\mu);$$

on aura par la différentiation

$$\varphi(\mu) = 3f(\mu) + \mu f'(\mu),$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(a \cos \theta + b \sin \theta \cos \psi + c \sin \theta \sin \psi) \sin \theta d\theta d\psi \\ = 2 \int_{-1}^{+1} (1 - x^2) [3f(\rho x) + \rho x f'(\rho x)] dx \\ = 2\pi \int_{-1}^{+1} f(\rho x) dx. \end{aligned}$$

101. On arrive d'ailleurs au même résultat par des considérations purement géométriques. Considérons en effet un

ellipsoïde engendré par la révolution d'une ellipse autour de son grand axe, et soit

$$r = ax + by + cz + \tau,$$

son équation rapportée aux trois axes rectangulaires, de directions arbitraires, qui passent par le foyer, r étant le rayon vecteur mené de l'origine au point $M(x, y, z)$ de la surface.

Concevons une surface sphérique décrite de l'origine comme centre avec l'unité pour rayon, et multiplions chaque élément $\sin \theta d\theta d\psi$ de cette surface par une fonction quelconque du rayon correspondant de l'ellipsoïde. La somme de tous ces produits, étendue à la surface entière de l'ellipsoïde, sera exprimée par l'intégrale double

$$(1) \quad \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f \left[\frac{\tau}{1 - (a \cos \theta + b \sin \theta \sin \psi + c \sin \theta \cos \psi)} \right] \sin \theta d\theta d\psi.$$

Mais l'équation de l'ellipsoïde, en comptant l'angle polaire θ à partir de l'axe de révolution, est

$$r = \frac{\tau}{1 - \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cos \theta},$$

en sorte que, dans ce cas, la somme dont il s'agit est exprimée par l'intégrale simple

$$(2) \quad 2\pi \int_0^\pi f \left(\frac{\tau}{1 - \sqrt{a^2 + b^2 + c^2} \cos \theta} \right) \sin \theta d\theta.$$

Égalant ces deux valeurs (1) et (2) d'une même surface, on trouve donc

$$\begin{aligned} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(a \cos \theta + b \sin \theta \sin \psi + c \sin \theta \cos \psi) \sin \theta d\theta d\psi \\ = 2\pi \int_{-1}^{+1} f(x, \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}) dx, \end{aligned}$$

ce qui est la formule précitée.

CHAPITRE XI.

DÉVELOPPEMENT DES FONCTIONS EN SÉRIES TRIGONOMÉTRIQUES.

FORMULE DE LAGRANGE.

102. Désignons par y une fonction périodique de x de la forme

$$(1) \quad y = A_1 \sin x + A_2 \sin 2x + A_3 \sin 3x + \dots + A_n \sin nx,$$

$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, étant des coefficients indépendants de x ; et soit $F(x)$ une autre fonction de x donnée arbitrairement, fonction qui peut être continue ou discontinue. Nous nous proposons d'abord de déterminer les n coefficients $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, de manière que l'on ait $y = F(x)$ pour les n valeurs particulières

$$(2) \quad x = \frac{\pi}{n+1}, \quad x = \frac{2\pi}{n+1}, \quad x = \frac{3\pi}{n+1}, \dots, \quad x = \frac{n\pi}{n+1},$$

valeurs comprises entre $x = 0$ et $x = \pi$.

A cet effet, représentons par $y_1, y_2, y_3, \dots, y_n$, les n valeurs correspondantes de $F(x)$. Nous aurons pour déterminer les n coefficients $A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, les n équations :

première des deux sommes ci-dessus aura pour valeur $n+1$; la seconde se réduira à $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2m\pi$ ou 0, et l'on aura, en conséquence, pour la valeur du coefficient A_m ,

$$A_m = \frac{2}{n+1} \left(y_1 \sin \frac{m\pi}{n+1} + y_2 \sin \frac{2m\pi}{n+1} + \dots + y_n \sin \frac{nm\pi}{n+1} \right).$$

Construisons maintenant les deux courbes ayant pour équations

$$y = F(x), \text{ et } y = A_1 \sin x + A_2 \sin 2x + \dots + A_n \sin nx;$$

ces courbes auront m points correspondants aux valeurs des abscisses (2), et tendront à se rapprocher l'une de l'autre à mesure que le nombre m des points augmentera. A la limite $m = \infty$, ces deux courbes coïncideront donc dans toute l'étendue comprise entre $x = 0$ et $x = \pi$; et comme à cette limite la somme qui exprime la valeur du coefficient A_m se change en une intégrale définie, on aura, en posant

$$\frac{m\pi}{n+1} = \alpha, \quad \frac{\pi}{n+1} = d\alpha, \quad y_m = F(\alpha),$$

$$A_m = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi F(\alpha) \sin m\alpha d\alpha.$$

On aura donc

$$(5) \quad F(x) = \frac{2}{\pi} \sum \sin mx \int_0^\pi F(\alpha) \sin m\alpha d\alpha.$$

le signe $\sum$ s'étendant à toutes les valeurs de m comprises entre $m = 1$ et $m = \infty$.

103. Lorsqu'on sait, *à priori*, que la fonction $F(x)$ est développable en série convergente de la forme

$$F(x) = A_1 \sin x + A_2 \sin 2x + \dots + A_m \sin mx + \dots$$

il suffit d'un calcul bien simple pour déterminer les coefficients A_m . En effet, si l'on remplace dans cette série x par α , et qu'on multiplie les deux membres par $\sin m\alpha d\alpha$; puis qu'on intègre entre les limites $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$, on aura

$$\int_0^\pi F(\alpha) \sin m\alpha d\alpha = A_0 \int_0^\pi \sin m\alpha \sin \alpha d\alpha \\ + A_1 \int_0^\pi \sin m\alpha \sin 2\alpha d\alpha + \dots + A_m \int_0^\pi \sin^2 m\alpha d\alpha + \dots \text{etc.};$$

et comme

$$\int_0^\pi \sin px \sin qx dx = 0$$

dans le cas où p et q sont différents; et

$$\int_0^\pi \sin^2 px dx = \frac{1}{2} \pi$$

dans celui où $p = q$, il en résulte

$$A_m = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi F(\alpha) \sin m\alpha d\alpha$$

104. Pareillement, si l'on sait que la fonction $F(x)$ est développable en série convergente, procédant suivant les cosinus des multiples de l'arc x , on fera

$$F(x) = A_0 + A_1 \cos x + A_2 \cos 2x + \dots + A_m \cos mx + \dots \text{etc.},$$

et multipliant les deux membres de cette équation par $\cos m\alpha d\alpha$, après avoir changé x en α ; puis intégrant entre les limites $\alpha = 0$ et $\alpha = \pi$, on aura

$$\int_0^\pi F(\alpha) \cos m\alpha d\alpha \\ = A_0 \int_0^\pi \cos m\alpha d\alpha + A_1 \int_0^\pi \cos m\alpha \cos \alpha d\alpha \\ + A_2 \int_0^\pi \cos m\alpha \cos 2\alpha d\alpha + \dots + A_m \int_0^\pi \cos^2 m\alpha d\alpha.$$

Mais dans le cas où p et q sont différents l'un de l'autre, on a

$$\int_0^\pi \cos px \cos qx dx = 0 \quad (*),$$

et dans celui où $p = q$

$$\int \cos^2 px dx = \frac{1}{2} \pi,$$

excepté toutefois le cas où $p = 0$, pour lequel cette dernière intégrale est égale à π . Donc

$$A_m = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi F(x) \cos mx dx, \quad A_0 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi F(x) dx$$

•

(*) Il est aisé de vérifier que les intégrales définies

$$\int_0^\pi \cos px \cos qx dx, \quad \int_0^\pi \sin px \sin qx dx$$

sont nulles, toutes deux, lorsque les nombres p et q sont différents l'un de l'autre. En effet, en faisant la somme et la différence de ces intégrales, on trouve

$$\begin{aligned} \int \cos px \cos qx dx &= \frac{1}{2} \int \cos (p-q)x dx + \frac{1}{2} \int \cos (p+q)x dx \\ &= \frac{\sin (p-q)x}{2(p-q)} + \frac{\sin (p+q)x}{2(p+q)} + \text{const.} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int \sin px \sin qx dx &= \frac{1}{2} \int \cos (p-q)x dx - \frac{1}{2} \int \cos (p+q)x dx \\ &= \frac{\sin (p-q)x}{2(p-q)} - \frac{\sin (p+q)x}{2(p+q)}, \end{aligned}$$

et ces expressions sont évidemment rendues nulles par choix des limites 0 et π , toutes les fois que les nombres entiers p et q sont inégaux.

et, par conséquent,

$$(6) \quad \begin{cases} F(x) = \frac{1}{2} \int_0^\pi F(\alpha) d\alpha \\ + \frac{2}{\pi} \sum \cos mx \int_0^\pi F(\alpha) \cos m\alpha d\alpha. \end{cases}$$

105. En ajoutant membre à membre les équations (5) et (6), et prenant la moitié de la somme, on trouve

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi F(\alpha) d\alpha \\ &+ \frac{1}{\pi} \sum \left[\sin mx \int_0^\pi F(\alpha) \sin m\alpha d\alpha \right. \\ &\quad \left. + \cos mx \int_0^\pi F(\alpha) \cos m\alpha d\alpha \right] \end{aligned}$$

et, par suite,

$$(7) \quad F(x) = \frac{1}{2} \int_0^\pi F(\alpha) d\alpha + \frac{1}{\pi} \sum \int_0^\pi F(\alpha) \cos m(x-\alpha) d\alpha,$$

106. On peut donner aux intégrales (5) et (6) des limites quelconques autres que celles 0 et π . Il suffit, pour cela, de remplacer x par $\frac{\pi x'}{a}$ et α par $\frac{\pi \alpha'}{a}$; on a alors

$$\begin{aligned} F\left(\frac{\pi x'}{a}\right) &= \frac{2}{a} \sum \sin \frac{m\pi x'}{a} \int_0^a F\left(\frac{\pi \alpha'}{a}\right) \sin \frac{m\pi \alpha'}{a} d\alpha' \\ F\left(\frac{\pi x'}{a}\right) &= \frac{1}{a} \int_0^a F\left(\frac{\pi \alpha'}{a}\right) d\alpha' \\ &+ \frac{2}{a} \sum \cos \frac{m\pi x'}{a} \int_0^a F\left(\frac{\pi \alpha'}{a}\right) \frac{\cos m\pi \alpha'}{a} d\alpha', \end{aligned}$$

et en supprimant les accents affectés aux lettres x et α , et écrivant $F(x)$, $F(\alpha)$, au lieu de $F\left(\frac{\pi x}{a}\right)$, $F\left(\frac{\pi \alpha}{a}\right)$, ce qui est

permis, F désignant une fonction absolument arbitraire de x , il vient

$$(8) \quad F(x) = \frac{2}{a} \sum \sin \frac{m\pi x}{a} \int_0^a F(\alpha) \sin \frac{m\pi \alpha}{a} d\alpha$$

$$(9) \quad F(x) = \frac{1}{a} \int_0^a F(\alpha) d\alpha + \frac{2}{a} \sum \cos \frac{m\pi x}{a} \int_0^a F(\alpha) \cos \frac{m\pi \alpha}{a} d\alpha.$$

formules qui subsistent pour toutes les valeurs de x comprises entre les limites 0 et a , et même à ces limites.

En combinant les équations (8) et (9) de la même manière que celles (5) et (6), on en déduit

$$(10) \quad F(x) = \frac{1}{2a} \int_0^a F(\alpha) d\alpha + \frac{1}{a} \sum \int_0^a F(\alpha) \cos \frac{m\pi(x-\alpha)}{a} d\alpha.$$

107. Si l'on écrit la formule (8) de la manière suivante :

$$F(x) = \frac{1}{\pi} \sum \frac{\pi}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \int_0^a F(\alpha) \sin \frac{m\pi \alpha}{a} d\alpha.$$

et que l'on suppose $a = \infty$; puis $\frac{m\pi}{a} = \epsilon$, $\frac{\pi}{a} = d\epsilon$, on aura

$$(11) \quad F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty F(\alpha) \sin \epsilon x \sin \epsilon \alpha d\epsilon d\alpha;$$

de sorte que $F(x)$ se trouvera exprimé entre les limites 0 et ∞ par une intégrale définie double.

On déduirait de même de la formule (9), en y supposant $a = \infty$,

$$(12) \quad F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \int_0^\infty F(\alpha) \cos \epsilon x \cos \epsilon \alpha d\epsilon d\alpha;$$

et ces équations (11) et (12) combinées entre elles par voie d'addition donnent

$$(13) \quad F(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} F(\alpha) \cos \theta (x - \alpha) d\alpha d\theta$$

108. Si dans les formules (8) et (9), on remplace a par $2l$ et x et α par $x' + l$ et $\alpha' + l$, on aura

$$(14) \quad F(x' + l) = \frac{1}{l} \sum \sin \frac{m\pi(x' + l)}{2l} \int_0^l F(\alpha' + l) \sin \frac{m\pi(\alpha' + l)}{2l} d\alpha'$$

$$(15) \quad F(x' + l) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l F(\alpha' + l) d\alpha' \\ + \frac{1}{l} \sum \cos \frac{m\pi(x' + l)}{2l} \int_{-l}^l F(\alpha' + l) \cos \frac{m\pi(\alpha' + l)}{2l} d\alpha'$$

ou en supprimant les accents affectés aux lettres x et α , et écrivant $F(x)$, $F(\alpha)$, au lieu de $F(x' + l)$ et $F(\alpha' + l)$, la caractéristique F désignant une fonction tout à fait arbitraire de x ,

$$(16) \quad F(x) = \frac{1}{l} \sum \sin \frac{m\pi(x+l)}{2l} \int_{-l}^l F(\alpha) \sin \frac{m\pi(\alpha+l)}{2l} d\alpha,$$

$$(17) \quad F(x) = \frac{1}{2l} \int_{-l}^l F(\alpha) d\alpha \\ + \frac{1}{l} \sum \cos \frac{m\pi(x+l)}{2l} \int_{-l}^l F(\alpha) \frac{\cos m\pi(\alpha+l)}{2l} d\alpha$$

formules qui subsistent entre les limites $-l$ et $+l$, et même à ces limites.

En combinant les équations (16) et (17), on en déduit

$$(18) \quad F(x) = \frac{1}{4l} \int_{-l}^l F(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2l} \sum F(\alpha) \cos \frac{m\pi(x-\alpha)}{2l} d\alpha.$$

109. Si dans la formule (10), on remplace a par $2a$, et x et α par $x + a$ et $x + \alpha$, on aura

$$F(x) = \frac{1}{4a} \int_{-a}^a F(\alpha) d\alpha + \frac{1}{2a} \sum \int_{-a}^a F(\alpha) \cos \frac{m\pi(x-\alpha)}{2a} d\alpha;$$

et, si dans cette dernière on pose

$$\frac{\pi}{2a} = \varepsilon, \quad \frac{m\pi}{2a} = m\varepsilon = p,$$

il viendra

$$F(x) = \frac{\varepsilon}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(a) da + \frac{1}{\pi} \sum \left[\int_{-\infty}^{\infty} F(a) \cos p(x-a) \right] \varepsilon.$$

Or, si l'on suppose a infiniment grand, la différence ε des valeurs consécutives de p deviendra infiniment petite, et la somme $\sum$ se changera en une intégrale définie prise depuis $p = 0$ jusqu'à $p = \infty$. En écrivant dp au lieu de ε , on aura donc

$$(19) \quad F(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(a) \cos p(x-a) da dp,$$

formule très-importante, donnée pour la première fois par Fourier, et qui s'étend à toutes les valeurs réelles, positives ou négatives, de la variable x .

110. Les formules qui précèdent s'étendent sans difficulté aux fonctions d'un nombre quelconque de variables. Si l'on prend, par exemple, la formule de Fourier que nous venons d'obtenir, et que l'on écrive dans cette formule $F(x, y)$ au lieu de $F(x)$, on aura

$$F(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(a, y) \cos p(x-a) da dp.$$

On aura de même

$$F(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(a, \xi) \cos q(y-\xi) d\xi dy;$$

d'où résulte

$$F(x, y) = \frac{1}{\pi^2} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(a, \xi) \cos p(x-a) \cos q(y-\xi) da d\xi dp dq$$

formule qui a lieu pour toutes les valeurs réelles, positives ou négatives des variables x, y .

Une fonction $F(x, y, z,)$ de trois variables s'exprimerait de même par l'intégrale sextuple

$$\frac{1}{\pi^3} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty \int_{-\infty}^\infty F(\alpha, \beta, \gamma) \cos p(x-\alpha) \\ \times \cos q(y-\beta) \cos r(z-\gamma) d\alpha d\beta d\gamma dp dq dr;$$

et, ainsi de suite.

LIVRE II.

APPLICATIONS GÉOMÉTRIQUES DU CALCUL INTÉGRAL.

CHAPITRE PREMIER.

QUADRATURE DES AIRES PLANES.

FORMULES GÉNÉRALES.

111. Nous avons vu que l'aire u d'une courbe plane rapportée à des coordonnées rectangulaires était représentée par $\int F(x)dx$. Il ne s'agira donc, pour obtenir cette aire, que d'intégrer cette expression entre des limites convenables. Si l'aire u , par exemple, doit commencer à la valeur de l'abscisse $x = a$, on aura $u = \int_a^x F(x)dx$, x représentant l'abscisse d'un point quelconque de la courbe; et si cette aire est limitée à l'ordonnée du point correspondant à l'abscisse $x = b$, on aura $u = \int_a^b F(x)dx$. Si les axes étaient obliques et faisaient entre eux un angle θ , on aurait

$$u = \sin \theta \int_a^b F(x) dx.$$

Lorsque l'aire u qu'il s'agit d'évaluer est comprise entre deux ordonnées CA, DB, *fig. (4)*, et les deux courbes CD, HG, ayant respectivement pour équations $y = F(x)$, $y_1 = f(x)$, on a pour l'expression de sa différentielle $du = (y - y_1)dx$; et, par suite,

$$u = \int_a^b (y - y_1) dx.$$

112. Si la courbe proposée était rapportée à des coordonnées polaires et représentée par conséquent par l'équation $r = \varphi(\theta)$, alors l'aire u serait l'espace compris entre la courbe et deux rayons vecteurs formant avec l'axe fixe, l'un l'angle θ_1 et l'autre celui θ ; et comme la différentielle de cette aire est dans ce cas $du = \frac{1}{2} r^2 d\theta$, on aurait

$$u = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta} r^2 d\theta.$$

Enfin, si l'aire qu'il s'agit de calculer était comprise entre deux rayons vecteurs et les deux courbes $r = \varphi(\theta)$, $r_1 = \psi(\theta)$, on aurait, pour l'expression de la différentielle, $du = \frac{1}{2} (r^2 - r_1^2) d\theta$; et, par suite,

$$u = \frac{1}{2} \int_{\theta_1}^{\theta} (r^2 - r_1^2) d\theta.$$

EXEMPLES DE QUADRATURES DE COURBES RAPPORTÉES A DES COORDONNÉES RECTILIGNES ET POLAIRES.

113. Considérons d'abord la parabole d'ordre quelconque représentée par l'équation

$$y^n = px^m.$$

m et n étant positifs; et soit $OMP = u$ fig. (5), cette aire étant prise à partir de l'origine.

On a

$$y = p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m}{n}};$$

d'où

$$du = y dx = p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m}{n}} dx,$$

et, par conséquent, entre les limites 0 et $OP = x$,

$$u = \int_0^x y dx = \int_0^x p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m}{n}} dx = \frac{n}{m+n} p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m+n}{n}},$$

En mettant cette expression sous la forme

$$u = \frac{n}{m+n} p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m}{n}} x,$$

et remplaçant $p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{m}{n}}$ par sa valeur y , on trouve

$$u = \frac{n}{m+n} xy.$$

D'où l'on voit que la courbe divise le rectangle $NOMP = xy$ dans le rapport constant de $n : m$.

Lorsque $n = m$, la courbe considérée devient une ligne droite puisque alors $y = p^{\frac{1}{2}} x$; le segment OMP se change en un triangle rectangle, et l'on a

$$u = \frac{1}{2} xy.$$

Quand $n = 2$, et $m = 1$, on a $y^2 = px$: c'est le cas de la parabole ordinaire; ainsi

$$u = \frac{2}{3} xy.$$

114. Il est facile de démontrer que les courbes représentées

par l'équation $y^n = px^m$ sont les seules qui jouissent de la propriété énoncée. En effet, on a

$$u : (xy - a) = n : m;$$

d'où

$$(m + n)u = nxy,$$

et, en différentiant,

$$(m + n)du = nx dy + ny dx.$$

On a d'ailleurs $du = y dx$, ce qui donne, en réduisant,

$$my dx = nx dy,$$

ou

$$m \frac{dx}{x} = n \frac{dy}{y}.$$

Intégrant, on a donc

$$nly = mly + C \quad \text{ou} \quad ly^n = lx^m + C,$$

et, en faisant $C = lp$,

$$ly^n = lp x^m;$$

c'est-à-dire

$$y^n = p x^m.$$

115. Considérons maintenant les courbes représentées par l'équation

$$x^m y^n = p;$$

Ce sont les hyperboles d'ordre quelconque rapportées à leurs asymptotes. Soient $n > m$ et BAPM = u , fig. (6), cette aire étant prise depuis l'abscisse OA = a jusqu'à l'abscisse OP = x . On a

$$y = p^{\frac{1}{n}} x^{-\frac{m}{n}};$$

d'où

$$du = y dx = p^{\frac{1}{n}} x^{-\frac{m}{n}} dx,$$

et, en intégrant entre les limites précitées,

$$\begin{aligned} u &= \int_a^x y dx = \int_a^x p^{\frac{1}{n}} x^{-\frac{m}{n}} dx. \\ &= \frac{n}{n-m} p^{\frac{1}{n}} \left(x^{\frac{n-m}{n}} - a^{\frac{n-m}{n}} \right) \end{aligned}$$

Ainsi, l'on voit que lorsque x devient infini, u le devient également; et que lorsque $a = 0$, cette aire se réduit à

$$\frac{n}{n-m} p^{\frac{1}{n}} x^{\frac{n-m}{n}}.$$

Cette expression peut être mise sous la forme

$$\frac{n}{n-m} p^{\frac{1}{n}} x^{-\frac{m}{n}};$$

et comme en remplaçant $p^{\frac{1}{n}} x^{-\frac{m}{n}}$ par sa valeur y , on a $u = \frac{n}{n-m} xy$, il s'ensuit que l'aire u est ici dans le rapport constant de n à $n-m$ avec le rectangle $OPMN = xy$.

116. On peut encore démontrer que les courbes renfermées dans l'équation $x^m y^n = p$ sont les seules pour lesquelles cette propriété ait lieu. En effet, on a

$$u : xy = u : (n-m);$$

d'où

$$u(n-m) = nxy,$$

et, en différentiant,

$$(n-m) du = nx dy + ny dx.$$

Ayant égard à l'équation $du = y dx$, il vient, en réduisant,

$$-m \frac{dx}{x} = n \frac{dy}{y}$$

Intégrant, on a donc

$$nly = C - mly,$$

et, en faisant $C = lp$,

$$ly^n = l \frac{p}{x^m}.$$

ou

$$x^m y^n = p.$$

Lorsque $m = n$, on a $xy = p$, et l'hyperbole est équilatère, puisque alors l'angle des coordonnées est droit. On a dans ce cas

$$y = \frac{p}{x}, \quad \text{d'où} \quad ydx = p \frac{dx}{x},$$

et, par conséquent,

$$u = plx + C = pl \frac{x}{a}.$$

Si $p = 1$, $a = 1$, on a simplement

$$u = lx.$$

C'est cette propriété qui a fait donner aux logarithmes népériens le nom de *logarithmes hyperboliques*.

417. Soit ensuite l'ellipse dont l'équation est

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2 \quad \text{ou} \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2}.$$

Considérons l'aire AMP fig. (7) prise depuis l'abscisse $OA = 0$ jusqu'à l'abscisse $OP = x$; et soit $AMP = u$. On aura

$$u = \int_0^x y dx = \frac{b}{a} \int_0^x \sqrt{a^2 - x^2}.$$

En intégrant par parties, on a d'ailleurs

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = x \sqrt{a^2 - x^2} + \int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}};$$

et comme

$$\int \frac{x^2 dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \int \frac{(x^2 - a^2 + a^2) dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = - \int \sqrt{a^2 - x^2} + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C,$$

il en résulte

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x\sqrt{a^2 - x^2}}{2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} - \int \sqrt{a^2 - x^2} dx + C.$$

Par conséquent

$$u = \frac{b}{a} \int_0^x \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{bx\sqrt{a^2 - x^2}}{2a} + \frac{ab}{2} \arcsin \frac{x}{a}.$$

Comme le premier terme $\frac{bx\sqrt{a^2 - x^2}}{2a}$ est égal à $\frac{xy}{2}$ qui représente l'aire du triangle OMP dont les côtés sont x et y , on voit que l'aire du secteur OBM sera représentée par le second terme $\frac{ab}{2} \arcsin \frac{x}{a}$.

Si l'on fait $x = a$, on aura $\frac{\pi ab}{4}$ pour la valeur du quart de l'ellipse; et par conséquent l'aire entière sera exprimée par πab .

118. L'équation de l'hyperbole rapportée à ses axes est

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2 \quad \text{ou} \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2};$$

et, en considérant l'aire AMP, *fig.* (8), prise depuis l'abscisse OA = a jusqu'à celle OP = x , on aura, en désignant par u cette aire,

$$u = \int_a^x y dx = \frac{b}{a} \int_a^x \sqrt{x^2 - a^2} dx$$

En intégrant par parties, on trouve

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} \, dx = x \sqrt{x^2 - a^2} - \int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}.$$

Mais

$$\int \frac{x^2 \, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \frac{(x^2 - a^2 + a^2) \, dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = \int \sqrt{x^2 - a^2} \, dx + a^2 \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}}$$

et

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 - a^2}} = l(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C.$$

Donc

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} \, dx = \frac{x \sqrt{x^2 - a^2}}{2} - \frac{a^2}{2} l(x + \sqrt{x^2 - a^2}) + C$$

et, par conséquent,

$$u = \frac{b}{a} \int_0^x \sqrt{x^2 - a^2} \, dx = \frac{bx \sqrt{x^2 - a^2}}{2a} - \frac{ab}{2} l\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right)$$

Comme le premier terme $\frac{bx \sqrt{x^2 - a^2}}{2a}$ de cette expression est égal à $\frac{xy}{2}$ qui représente l'aire du triangle OMP, il s'ensuit que l'aire du secteur OAM sera représentée par le second terme $\frac{ab}{2} l\left(\frac{x + \sqrt{x^2 - a^2}}{a}\right)$.

.119. Considérons encore la cycloïde rapportée à son sommet A, fig. (9); et soit AP = x, MP = y. L'équation différentielle de cette courbe sera

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{2a - y}},$$

et en considérant l'aire AMP, on aura

$$\text{aire AMP} = \int_0^y y dx = \int_0^y dy \sqrt{2ay - y^2}.$$

Cela posé, menons MQ parallèle à AH, et considérons le secteur QAI formé dans le cercle générateur BIA. En remarquant que $QI = \sqrt{2ay - y^2}$, on aura

$$\text{aire QAI} = \int_0^y dy \sqrt{2ay - y^2}.$$

Ainsi

$$\text{aire AMP} = \text{aire QAI}.$$

Il suit de là que

$$\text{aire BIA} = \text{aire AOH} = \frac{1}{2} \pi a^2.$$

et comme aire BAH = $2\pi a^2$, il en résulte

$$\text{aire BAD} = \frac{3}{2} \pi a^2.$$

Par conséquent

$$\text{aire CADB} = 3\pi a^2$$

Ainsi, l'aire de la cycloïde est égale au triple de celle du cercle générateur.

120. Soit maintenant la spirale logarithmique dont l'équation en coordonnées polaires est

$$r = ae^{\frac{m\theta}{n}}.$$

On aura, pour l'expression de l'aire comprise entre les deux rayons vecteurs correspondants aux angles θ_1 et θ_2 ,

$$u = \frac{a^2}{2} \int_{\theta_1}^{\theta_2} e^{\frac{2m\theta}{n}} d\theta = \frac{a^2}{4m} \left(e^{\frac{2m\theta_2}{n}} - e^{\frac{2m\theta_1}{n}} \right);$$

et, par suite,

$$u = \frac{r^2 - r_1^2}{4m},$$

r et r_1 désignant les rayons vecteurs correspondants aux angles θ et θ_1 .

Lorsque le point C *fig.* (10) se meut sur la courbe en s'approchant du pôle O, le rayon vecteur r_1 ou OC décroît jusqu'à zéro, et l'aire du secteur a pour limite $\frac{r^2}{4m}$.

121. Considérons enfin la courbe dont l'équation est

$$(1) \quad x^3 + y^3 - axy = 0$$

qui est connue sous le nom de *folium de Descartes*; et cherchons l'aire de cette courbe qui se trouve renfermée dans la portion fermée OCM, *fig.* (11).

En employant les coordonnées polaires, c'est-à-dire en remplaçant dans l'équation (1), x par $r \cos \theta$ et y par $r \sin \theta$, on aura

$$r^3 (\cos^3 \theta \sin^3 \theta) - ar \sin \theta \cos \theta = 0$$

ou

$$r (\cos^3 \theta + \sin^3 \theta) - a \sin \theta \cos \theta = 0,$$

et, par conséquent,

$$r = \frac{a \sin \theta \cos \theta}{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta}$$

On aura, d'ailleurs, en désignant par u la portion d'aire ONG,

$$u = \frac{1}{2} \int_0^{\theta} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{\theta} \frac{a^2 \sin^2 \theta \cos^2 \theta d\theta}{(\cos^3 \theta + \sin^3 \theta)^2},$$

ou

$$u = \frac{a^2}{2} \int_0^{\theta} \frac{\tan^2 \theta d(\tan \theta)}{(1 + \tan^3 \theta)^2};$$

et, si l'on pose

$$1 + \tan^3 \theta = t; \quad \text{d'où} \quad dt = 3 \tan^2 \theta d(\tan \theta),$$

on trouvera

$$\int \frac{\tan^3 \theta d(\tan \theta)}{(1 + \tan^3 \theta)^3} = \frac{1}{3} \int \frac{dt}{t^3} = -\frac{1}{3t} + C = -\frac{1}{3(1 + \tan^3 \theta)} + C,$$

en sorte que

$$u = -\frac{a^3}{b} \frac{1}{1 + \tan^3 \theta} + C.$$

Mais l'aire devant être nulle pour $\theta = 0$, il en résulte $C = \frac{a^3}{6}$;
par conséquent

$$u = \frac{a^3}{6} \frac{\tan^3 \theta}{1 + \tan^3 \theta} = \frac{a^3}{6} \frac{1}{1 + \cot^3 \theta}$$

Maintenant si l'on fait dans cette valeur de u , $\theta = \frac{\pi}{2}$, on aura l'aire contenue dans la portion fermée OMC. On aura donc

$$u = \frac{a^3}{6}.$$

122. On trouverait de même que l'aire contenue dans la portion fermée de la courbe dont l'équation est

$$x^3 + y^3 - a^2 xy = 0,$$

ou

$$r^3 = \frac{a^2 \sin \theta \cos \theta}{\sin^3 \theta + \cos^3 \theta},$$

a pour expression

$$u = \frac{\pi a^3}{8}.$$

CHAPITRE II.

RECTIFICATION DES COURBES.

FORMULES GÉNÉRALES.

123. Nous avons trouvé que la différentielle de l'arc s d'une courbe rapportée à des coordonnées rectangulaires était exprimée par $\sqrt{dx^2 + dy^2}$, dans le cas où cette courbe était plane, et par $\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}$, dans celui où la courbe était à double courbure. Nous aurons donc pour l'expression de la longueur de l'arc compris entre les points de la courbe correspondants aux abscisses, x_0 et x , dans l'un et dans l'autre de ces cas

$$s = \int_{x_0}^x \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

$$s = \int_{x_0}^x \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}.$$

124. Si la courbe était rapportée à des coordonnées polaires, $\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2}$ ou $\sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 \sin^2 \theta d\psi^2}$ exprimerait sa différentielle; et l'on aurait pour l'expression de la longueur de l'arc de la courbe compris entre les points correspondants aux valeurs θ_0 et θ .

$$s = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2},$$

$$s = \int_{\theta_0}^{\theta} \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\psi^2}.$$

APPLICATIONS.

125. Nous allons appliquer les formules qui précèdent à la rectification de quelques courbes.

Soit d'abord la parabole dont l'équation est

$$y^2 = 2px;$$

on en déduit

$$ydy = p dx, \quad \text{d'où} \quad dx = \frac{ydy}{p},$$

et, par suite,

$$ds = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{\frac{y^2 dy^2}{p^2} + dy^2} = \frac{dy}{p} \sqrt{y^2 + p^2}.$$

En prenant l'arc à partir du sommet, on a donc

$$s = \frac{1}{p} \int_0^y dy \sqrt{y^2 + p^2}.$$

Mais

$$\frac{1}{p} \int dy \sqrt{y^2 + p^2} = \frac{y \sqrt{y^2 + p^2}}{2p} + \frac{p}{2} l(y + \sqrt{y^2 + p^2}) + C,$$

et

$$C = -\frac{p}{2} l p.$$

Donc

$$s = \frac{y \sqrt{y^2 + p^2}}{2p} + \frac{p}{2} l \left(\frac{y + \sqrt{y^2 + p^2}}{p} \right).$$

126. L'équation de l'ellipse est

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2$$

et donne

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}.$$

On a donc

$$ds = dx \sqrt{1 + \frac{b^2 x^2}{a^4 y^2}} = dx \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2(a^2 - x^2)}},$$

ou, en posant pour abréger $\sqrt{a^2 - b^2} = ae$,

$$ds = dx \sqrt{\frac{a^2 - e^2 x^2}{a^2 - x^2}}.$$

L'abscisse x étant toujours moindre que a , on peut poser

$$x = a \sin \varphi,$$

d'où

$$dx = a \cos \varphi d\varphi \quad \text{et} \quad ds = a d\varphi \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}.$$

Pour l'expression de la longueur de l'arc compté à partir du sommet du petit axe, on aura donc

$$s = a \int_0^{\varphi} d\varphi \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi}.$$

Pour obtenir cette intégrale, nous développerons $(1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}}$ en série à l'aide de la formule du binôme, ce qui nous donnera

$$\begin{aligned} (1 - e^2 \sin^2 \varphi)^{\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{1}{2} e^2 \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \frac{1}{4} e^4 \sin^4 \varphi - \dots \\ &\quad - \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{5}{6} e^6 \sin^6 \varphi - \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{5}{6} \frac{5}{8} e^8 \sin^8 \varphi - \dots \end{aligned}$$

et nous aurons ensuite

$$s = a \left[\varphi - \frac{1}{2} e^2 \int d\varphi \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \frac{1}{4} e^4 \int d\varphi \sin^4 \varphi \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{5}{6} e^6 \int d\varphi \sin^6 \varphi - \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{5}{6} \frac{5}{8} e^8 \int d\varphi \sin^8 \varphi - \dots \right].$$

Il nous restera encore à déterminer $\int d\varphi \sin^2 \varphi$, $\int d\varphi \sin^4 \varphi$

etc.; or, c'est ce que l'on fera à l'aide de la formule du n° (55), savoir :

$$\begin{aligned} \int \sin^m \varphi d\varphi = & -\frac{\cos \varphi}{m} \left[\sin^{m-1} \varphi + \frac{m-1}{m-2} \sin^{m-3} \varphi \right. \\ & + \frac{(m-1)(m-3)}{(m-2)(m-4)} \sin^{m-5} \varphi + \dots + \frac{(m-1)(m-3)\dots 5.3.1}{(m-2)(m-4)\dots 4.2} \sin \varphi \Big] \\ & + \frac{(m-1)(m-3)\dots 5.3.1}{(m-2)(m-4)\dots 4.2} \frac{m}{\varphi}. \end{aligned}$$

Si l'on veut avoir la longueur du quart du périmètre de l'ellipse, il faudra prendre $\varphi = \frac{\pi}{2}$, ce qui donnera

$$\begin{aligned} s = \text{AM} &= a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} d\varphi \\ &= a \left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} e^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sin^2 \varphi - \frac{1}{2} \frac{1}{4} e^4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sin^4 \varphi \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{5}{6} e^6 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sin^6 \varphi - \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{5}{6} \frac{5}{8} e^8 \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \sin^8 \varphi - \dots \right]. \end{aligned}$$

Pour calculer les intégrales contenues dans le second membre, on aura d'ailleurs

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m \varphi d\varphi = \frac{1.3.5\dots(m-3)(m-1)}{2.4.6\dots m} \frac{\pi}{2};$$

d'où

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^4 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^6 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \frac{5}{4} \frac{3}{6} \frac{\pi}{2},$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^8 \varphi d\varphi = \frac{1}{2} \frac{5}{4} \frac{3}{6} \frac{7}{8} \frac{\pi}{2}.$$

Donc

$$s = a \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - e^2 \sin^2 \varphi} d\varphi = a \left[\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} e^2 \frac{1}{2} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{4} e^4 \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{\pi}{2} \right. \\ \left. - \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{3}{6} e^6 \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{2} \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{3}{6} \frac{5}{8} e^8 \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{8} \frac{7}{2} \frac{\pi}{2} - \dots \right],$$

ou si l'on veut

$$s = \frac{\pi a}{2} \left[1 - \left(\frac{1}{2} e^2 \right) - \frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} \frac{3}{4} e^4 \right) - \frac{1}{5} \left(\frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} e^6 \right) \right. \\ \left. - \frac{1}{7} \left(\frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \frac{7}{8} e^8 \right) - \dots \right].$$

127. La rectification de l'hyperbole offre un calcul semblable. On a

$$a^2 y^2 - b^2 x^2 = -a^2 b^2,$$

ce qui donne

$$\frac{dy}{dx} = \frac{b^2 x}{a^2 y},$$

et, par conséquent,

$$ds = dx \sqrt{1 + \frac{b^4 x^2}{a^4 y^2}} = dx \sqrt{\frac{(a^2 + b^2)x^2 - a^4}{a^2(x^2 - a^2)}},$$

ou en posant, pour abréger, $\sqrt{a^2 + b^2} = ae$,

$$ds = dx \sqrt{\frac{e^2 x^2 - a^2}{x^2 - a^2}}.$$

L'abscisse x étant toujours plus grande que a , on peut poser

$$x = \frac{a}{\cos \varphi},$$

φ désignant un angle qui varie de 0 à $\frac{\pi}{2}$. Il en résulte

$$dx = \frac{a \sin \varphi d\varphi}{\cos^2 \varphi},$$

et, par conséquent,

$$ds = ae \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \varphi}{e^2}}.$$

Pour l'arc compté à partir du sommet, on a donc

$$s = \int_0^\varphi ae \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \varphi}{e^2}}.$$

Si l'on développe maintenant $\left(1 - \frac{\cos^2 \varphi}{e^2}\right)^{\frac{1}{2}}$ en série, on aura

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{\cos^2 \varphi}{e^2}\right)^{\frac{1}{2}} &= 1 - \frac{1}{2} \frac{\cos^2 \varphi}{e^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{\cos^4 \varphi}{e^4} - \dots \\ &\quad - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \dots (2m-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m} \frac{\cos^{2m} \varphi}{e^{2m}}, \end{aligned}$$

et, par suite,

$$s = ae \int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{\cos^2 \varphi}{e^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{\cos^4 \varphi}{e^4} - \dots \right. \\ \left. - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \dots (2m-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m} \frac{\cos^{2m} \varphi}{e^{2m}} \right]$$

Donc

$$s = ae \tan \varphi - \frac{1}{2} \frac{a}{e} \varphi - \frac{a}{e} \int_0^\varphi \left[\frac{1}{2} \frac{1}{4} \frac{\cos^2 \varphi}{e^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{6} \frac{\cos^4 \varphi}{e^4} - \dots \right. \\ \left. - \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \dots (2m-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \dots 2m} \frac{\cos^{2m} \varphi}{e^{2m}} \right] d\varphi.$$

Il nous restera encore à intégrer des expressions de la forme $\cos^m \varphi d\varphi$; or, c'est ce que l'on fera aisément à l'aide de la formule du n° (35).

128. Soit maintenant la cycloïde dont l'équation est

$$\frac{dy}{dx} = \sqrt{\frac{y}{2a-y}}.$$

On a

$$dx = dy \sqrt{\frac{2a-y}{y}},$$

et, par suite,

$$ds = dy \sqrt{1 + \frac{2a-y}{y}} = 2 \sqrt{2a} \frac{dy}{2\sqrt{y}}.$$

Pour l'arc AM, compté à partir du sommet, on aura donc

$$S = 2 \sqrt{2a} \int_0^y \frac{dy}{2\sqrt{y}}.$$

et, par conséquent,

$$s = 2 \sqrt{2ay}$$

Si l'on fait $y = 2a$, on aura $s = 4a$; c'est la longueur de la demi-cycloïde.

129. Soit enfin la spirale logarithmique représentée par l'équation

$$r = ae^{m\theta}$$

On a

$$dr = ame^{m\theta} d\theta;$$

par suite

$$ds = \sqrt{dr^2 + r^2 d\theta^2} = a \sqrt{1 + m^2} e^{m\theta} d\theta;$$

Ainsi

$$s = ae^{m\theta} \frac{\sqrt{1+m^2}}{m} + C$$

ou

$$s = r \frac{\sqrt{1+m^2}}{m} + C.$$

Si l'arc doit commencer au pôle, on aura

$$s = r \frac{\sqrt{1+m^2}}{m},$$

car alors $C = 0$.

CHAPITRE III.

CUBATURE DES SOLIDES.

SOLIDES DE RÉVOLUTION. — FORMULES GÉNÉRALES.

130. Soit V le volume du solide engendré par la révolution de l'aire plane $AMBP$, *fig. (12)* tournant autour d'un axe Ox situé dans son plan. Si l'on attribue à x ou OP un accroissement Δx représenté sur la figure par PP' , V prendra l'accroissement ΔV égal au volume engendré par la révolution de l'aire $MM'PP'$ autour de Ox ; et comme on peut toujours prendre Δx assez petit pour que de P en P' , y soit constamment croissant ou constamment décroissant, on aura, en le supposant croissant,

$$\Delta V > \pi y^2 \Delta x, \quad \Delta V < \pi (y + \Delta y)^2 \Delta x$$

ou

$$\frac{\Delta V}{\Delta x} > \pi y^2, \quad \frac{\Delta V}{\Delta x} < \pi (y + \Delta y)^2;$$

et, par conséquent, à la limite

$$\frac{dV}{dx} = \pi y^2$$

ou

$$dV = \pi y^2 dx$$

Pour l'expression du volume compris entre les deux plans

menés perpendiculairement à l'axe des x et aux distances x_0 , x , de l'origine, on aura donc

$$(1) \quad V = \pi \int_{x_0}^x y^2 dx.$$

131. Si l'on demandait le volume du solide engendré par la révolution de l'aire ACDM autour de l'axe Ox, *fig.* (13), on l'obtiendrait en remarquant que ce volume est égal à la différence de ceux décrits par la révolution des aires ABPM, CBPD, lesquels ont respectivement pour expressions $\pi \int_{x_0}^x y^2 dx$, $\pi \int_{x_0}^x y_1^2 dx$, x_0 et x désignant les valeurs de l'abscisse correspondantes aux plans perpendiculaires entre lesquels se trouve compris le volume, et y , y_1 , les ordonnées MP, AB. On trouverait ainsi

$$V = \pi \int_{x_0}^x y^2 dx - \pi \int_{x_0}^x y_1^2 dx$$

ou

$$(2) \quad V = \pi \int_{x_0}^x (y^2 - y_1^2) dx.$$

APPLICATIONS.

132. Cherchons, en premier lieu, le volume du solide engendré par la révolution de l'ellipse tournant autour de son grand axe, volume qui est celui de l'ellipsoïde. Soit

$$y^2 = \frac{b^2}{a^2} (2ax - x^2)$$

l'équation de l'ellipse rapportée à son sommet. On aura pour l'expression du volume compris entre le sommet O, *fig.* (14), et le plan correspondant à l'abscisse OP = x ,

$$V = \frac{\pi b^2}{a^2} \int_0^x (2ax - x^2) dx = \frac{\pi b^2}{a^2} \left(ax^2 - \frac{x^3}{3} \right)$$

En faisant $x = 2a$, on aura donc, pour le volume entier de l'ellipsoïde,

$$V = \frac{\pi b^3}{a^3} \left(4a^3 - \frac{8a^3}{3} \right)$$

ou

$$V = \frac{4}{3} \pi b^3 a.$$

Si l'on suppose $b = a$, on trouve $V = \frac{4}{3} \pi a^3$: c'est le volume de la sphère de rayon a .

Soit, en second lieu,

$$y^2 = 2px$$

l'équation de la courbe génératrice qui est celle de la parabole. En considérant le volume du solide compris entre le sommet O et le plan correspondant à l'abscisse $OP = x$, on aura

$$V = \pi p \int_0^x 2x dx = \pi p x^2 = \frac{1}{2} \pi y^2 x.$$

Considérons enfin la cycloïde dont l'équation est

$$dx = dy \sqrt{\frac{2a-y}{y}} = \frac{dy}{y} \sqrt{2ay - y^2};$$

et cherchons le volume du solide engendré par la révolution du segment AMQ , fig. (9), tournant autour de l'axe des x . Ce volume sera égal à la différence de ceux engendrés par le rectangle $AQMP$ et le segment AMP , en sorte que tout se réduira à déterminer le volume du solide engendré par la révolution de ce dernier segment.

Or, en posant dans l'équation (1) $x = y$, on aura

$$V = \pi \int_0^y y dy \sqrt{2ay - y^2}$$

ou

$$V = \pi a \int_0^y dy \sqrt{2ay - y^2} - \pi \int_0^y (a-y) dy \sqrt{2ay - y^2}$$

On a d'ailleurs n° (119)

$$\int_0^y dy \sqrt{2ay - y^2} = \text{aire } \triangle QI,$$

et, en posant dans la seconde intégrale $2ay - y^2 = z$, d'où $2(a - y)dy = dz$,

$$\begin{aligned} \int (a - y) dy \sqrt{2ay - y^2} &= \int \sqrt{z} \frac{dz}{2} = \frac{1}{2} \int z^{\frac{1}{2}} dz \\ &= \frac{1}{3} z^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3} (2ay - y^2)^{\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

On aura donc

$$V = \pi a \text{ aire } \triangle QI - \frac{1}{3} \pi (2ay - y^2)^{\frac{3}{2}}.$$

VOLUME DES CORPS TERMINÉS PAR DES SURFACES QUELCONQUES. FORMULES GÉNÉRALES.

133. Soit $z = F(x, y)$ l'équation en coordonnées rectangulaires de la surface par laquelle le corps est terminé; et cherchons le volume du solide compris entre cette surface, le plan des xy et le cylindre projetant parallèle à l'axe des z , dont $BMCN$, *fig.* (15), est la trace sur le plan horizontal. On l'obtiendra en remarquant que ce volume est la limite d'une somme d'éléments tels que celui qui se trouve compris entre deux plans parallèles infiniment voisins dont NM , $N'M'$ sont les traces sur le plan des xy , élément qui est lui-même la limite d'une somme de parallépipèdes rectangles infiniment petits tels que celui qui se projette en *uvts*. D'après ce qui a été dit au n° (14), t. I, on aura donc pour l'expression V du volume considéré

$$V = \lim \sum \sum (z h k),$$

ou, d'après la notation du calcul intégral, et en désignant

par x_0, x_1 , les limites extrêmes OA, OD, et par y_0, y_1 , celles PN, PM,

$$V = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} z \, dx \, dy = \int_{x_0}^{x_1} \int_{y_0}^{y_1} z \, dy \, dx.$$

Si l'on demandait le volume du solide compris entre le cylindre dont BMCN est la trace sur le plan horizontal et les deux surfaces ayant respectivement pour équations $z = F(x, y)$, $z_1 = f(x, y)$, on aurait pour ce volume

$$V = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} (z - z_1) \, dy,$$

en remarquant que $\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} z \, dy$ et $\int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} z_1 \, dy$ sont les expressions des volumes compris entre le cylindre projetant et les deux surfaces proposées, volumes dont la différence est égale à celui demandé.

134. On peut remarquer que ce procédé revient à calculer l'aire de la section faite dans le corps par un plan quelconque perpendiculaire à l'axe des x , et à intégrer ensuite l'expression de cette aire multipliée par dx , entre les limites x_0 et x_1 du corps. En effet, lorsqu'on calcule l'aire de la section faite dans le corps par un plan, on détermine ainsi la valeur de l'intégrale

$$\int_{y_0}^{y_1} (z - z_1) \, dy;$$

et en multipliant cette intégrale par le facteur constant dx , on forme l'expression

$$dx \int_{y_0}^{y_1} (z - z_1) \, dy$$

qui est égale à dV , et qui représente, par conséquent, le volume de la tranche comprise entre le plan mené perpendiculairement à l'axe des x et celui infiniment voisin mené à la distance dx de celui-ci. En intégrant cette expression entre

les limites x_0 et x_1 du corps, il vient donc pour l'expression générale de son volume V

$$V = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} (z - z_1) dy.$$

Si les axes des coordonnées au lieu d'être rectangulaires étaient obliques, on aurait, en désignant par λ l'angle que fait l'axe des z avec celui des y , et par μ l'angle que fait l'axe des x avec le plan des xy ,

$$dV = \sin \mu dx \int_{y_0}^{y_1} (z - z_1) dy \sin \lambda,$$

et, par suite,

$$V = \sin \mu \sin \lambda \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} (z - z_1) dy.$$

APPLICATION A L'ELLIPSOÏDE.

135. Soit un ellipsoïde rapporté à ses diamètres rectangulaires $2a$, $2b$, $2c$, dont l'équation est

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

La section faite dans le corps par un plan parallèle au plan yOz est une ellipse ayant pour équation

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 - \frac{x^2}{a^2}.$$

On a pour les demi-axes de cette ellipse

$$b \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}, \quad c \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}},$$

et, par suite, pour l'aire de la section ou pour la valeur de l'intégrale $\int_{y_0}^{y_1} (z - z_1) dy$,

$$\pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) \quad \text{ou} \quad \frac{\pi bc}{a^2} (a^2 - x^2).$$

Pour le volume compris entre le plan de cette section et celui yOz , on a donc

$$\frac{\pi bc}{a^2} \int_0^x dx (a^2 - x^2) \quad \text{ou} \quad \frac{\pi bc}{a^2} \left(a^2 x - \frac{x^3}{3}\right)$$

Si dans cette expression on fait $x = a$, on aura le volume de la moitié de l'ellipsoïde, savoir :

$$\frac{\pi bc}{a^2} \left(a^2 - \frac{a^3}{3}\right) = \frac{2}{3} \pi abc.$$

Par suite, le volume entier sera exprimé par $\frac{4}{3} \pi abc$.

Lorsque l'ellipsoïde est rapporté à des diamètres conjugués $2a'$, $2b'$, $2c'$, on trouve pour le volume entier

$$\frac{4}{3} \pi a' b' c' \sin \mu \sin \lambda;$$

et comparant cette expression avec celle $\frac{4}{3} \pi abc$, on en déduit

$$a' b' c' \sin \mu \sin \lambda = abc;$$

d'où l'on voit que tous les parallélipipèdes construits sur les diamètres conjugués d'un ellipsoïde sont équivalents aux parallélipipèdes rectangles construits sur les axes.

VOLUMES DES CORPS EN COORDONNÉES POLAIRES.

136. Nous supposerons maintenant que la surface du solide soit rapportée à des coordonnées polaires, et nous nous proposerons d'exprimer son volume en fonction de ces coordonnées. Soient r le rayon vecteur mené de l'origine au point M de la surface, θ l'angle que forme ce rayon vecteur avec l'axe des z , et ψ l'angle formé par sa projection sur le plan des xy avec l'axe des x . Considérons les trois équations $r = c$, $\theta = c'$, $\psi = c''$. Elles représentent un système triple de surfaces qui se coupent deux à deux sous des angles droits. Les surfaces du premier système sont des sphères ayant pour centre l'origine des coordonnées; celles du second système sont des cônes droits ayant pour axe celui des z ; et enfin celles du troisième système sont des plans passant par l'axe des z . Il en résulte que si l'on prend dans chaque système deux surfaces infiniment voisines, on aura en tout six surfaces qui détermineront un parallélipède rectangle infiniment petit ayant ses trois dimensions respectivement égales à dr , $r d\theta$, $r \sin \theta d\psi$; et l'on aura, en conséquence, pour l'expression de son volume

$$r^3 \sin \theta dr d\theta d\psi.$$

Maintenant concevons un cône ayant pour sommet l'origine des coordonnées; pour base l'élément superficiel de la sphère déterminé par l'intersection des surfaces infiniment voisines appartenant au système des deux équations $\theta = c'$, $\psi = c''$; et cherchons le volume du corps qui se trouve renfermé dans ce cône, volume qui est la différentielle de celui cherché. On l'obtiendra en intégrant l'expression $r^3 \sin \theta dr d\theta d\psi$ par rapport à r entre les deux valeurs r_0 et r relatives aux surfaces qui terminent le corps. On aura ainsi

$$\frac{1}{3} (r^3 - r_0^3) \sin \theta d\theta d\psi$$

Pour l'expression générale du volume, on aura donc, en désignant par θ_0 et θ_1 les limites de θ , et par ψ_0 et ψ_1 celles de ψ ,

$$V = \frac{1}{3} \int_{\psi_0}^{\psi_1} d\psi \int_{\theta_0}^{\theta_1} (r^3 - r_0^3) \sin \theta d\theta.$$

Si le pôle se trouvait placé dans l'intérieur du corps, alors 0 et π seraient les limites de θ ; 0 et 2π celles de ψ ; et l'on aurait

$$V = \frac{1}{3} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^3 \sin \theta d\theta d\psi.$$

CHAPITRE IV.

QUADRATURE DES SURFACES COURBES.

QUADRATURE DES SURFACES COURBES QUELCONQUES.

137. On appelle aire d'une surface courbe, la limite vers laquelle tend l'aire d'un polyèdre inscrit ou circonscrit à cette surface, et dont les faces planes tendent toutes à devenir tangentes à la surface considérée.

Démontrons d'abord l'existence de cette limite.

Supposons que la surface proposée soit divisée par des plans perpendiculaires les uns à l'axe des x , les autres à celui des y , ces plans étant menés à des distances Δx et Δy les uns des autres; et considérons un des prismes indéfinis déterminé par l'intersection de ces plans. Ce prisme interceptera sur la surface proposée un quadrilatère courbe dont la projection sur le plan xy sera le rectangle $\Delta x \Delta y$; sur celle du polyèdre une surface que l'on pourra regarder comme composée de parties planes $a, a', a'',$ etc., lesquelles, par définition, tendront à devenir tangentes à la surface, et par conséquent à se confondre avec le plan tangent au point M de cette surface; et en désignant par $\theta, \theta', \theta'',$ etc., les angles formés par ces parties planes avec le plan des xy , et par λ l'angle que forme le plan tangent avec le même plan xy , on aura

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \cos \lambda (1 + \alpha), \\ \cos \theta' &= \cos \lambda (1 + \alpha'), \\ \cos \theta'' &= \cos \lambda (1 + \alpha''), \\ &\dots\dots\dots\end{aligned}$$

$\alpha, \alpha', \alpha'' \dots$, étant des quantités qui s'annulent avec Δx et Δy .
On aura, par suite, pour la projection de ces éléments plans
 $a, a', a'' \dots$, sur le plan xy ,

$$\begin{aligned} & a \cos \lambda (1 + \alpha), \\ & a' \cos \lambda (1 + \alpha'), \\ & a'' \cos \lambda (1 + \alpha''). \\ & \dots \dots \dots \end{aligned}$$

Mais le rectangle $\Delta x \Delta y$ est égal à la somme de toutes ces projections. Ainsi

$$\Delta x \Delta y = a \cos \lambda (1 + \alpha) + a' \cos \lambda (1 + \alpha') + a'' \cos \lambda (1 + \alpha'') + \dots,$$

ou

$$\frac{\Delta x \Delta y}{\cos \lambda} = a + a' + a'' + \dots + (a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \dots),$$

et, en posant $a + a' + a'' + \dots = \omega$,

$$\frac{\Delta x \Delta y}{\cos \lambda} = \omega + (a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \dots)$$

Pour toute l'étendue de la surface, on aura donc

$$\sum \frac{\Delta x \Delta y}{\cos \lambda} = \sum \omega + \sum (a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \dots),$$

et à la limite, en remarquant que celle de $\sum (a\alpha + a'\alpha' + \dots)$ est nulle,

$$\lim \sum \omega = \lim \sum \frac{\Delta x \Delta y}{\cos \lambda} = \iint \frac{dx dy}{\cos \lambda}.$$

Ainsi, la surface du polyèdre ou $\sum \omega$ a une limite qui est $\iint \frac{dx dy}{\cos \lambda}$. D'après cela, si l'on désigne par S l'aire de la surface courbe, on aura

$$S = \iint \frac{dx dy}{\cos \lambda}$$

ou parce que

$$\cos \lambda = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}},$$

$$u = \int \int dx dy \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}.$$

Entre les limites $x = x_0$, $x = x_1$, et $y_0 = F(x)$, $y_1 = f(x)$, relatives aux plans et aux cylindres qui terminent la surface, on aura donc enfin

$$u = \int_{x_0}^{x_1} dx \int_{y_0}^{y_1} dy \sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2}.$$

APPLICATION A LA SPHÈRE.

138. Proposons-nous, comme application, de déterminer l'aire de la surface de la sphère dont l'équation est

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

En différentiant cette équation, on a

$$x dx + y dy + z dz = 0,$$

d'où

$$dz = -\frac{x}{z} dx - \frac{y}{z} dy$$

et, par conséquent,

$$\frac{dz}{dx} = -\frac{x}{z}, \quad \frac{dz}{dy} = -\frac{y}{z}.$$

On a donc

$$\sqrt{1+\left(\frac{dz}{dx}\right)^2+\left(\frac{dz}{dy}\right)^2} = \sqrt{1+\frac{x^2}{z^2}+\frac{y^2}{z^2}} = \frac{1}{z} \sqrt{x^2+y^2+z^2} = \frac{r}{z},$$

et en remettant pour z sa valeur $\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}$ tirée de l'équation de la sphère,

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} = \frac{r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}}$$

Cela posé, la limite de la surface dans le sens des y est représentée par

$$x^2 + y^2 = r^2 \quad \text{ou} \quad y = \sqrt{r^2 - x^2};$$

en sorte que

$$y_0 = -\sqrt{r^2 - x^2} \quad y_1 = +\sqrt{r^2 - x^2}.$$

On a d'ailleurs

$$x_0 = -r, \quad x_1 = +r.$$

Donc

$$S = \int_{-r}^{+r} dx \int_{-\sqrt{r^2 - x^2}}^{+\sqrt{r^2 - x^2}} \frac{dy r}{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}},$$

et, par conséquent, en effectuant les intégrations,

$$S = 2\pi r^2.$$

Cette expression est celle de la surface de la demi-sphère. Pour la surface totale on a donc $4\pi r^2$.

QUADRATURE DES SURFACES DE RÉVOLUTION.

139. Soit AM un arc de courbe plane qui, tournant autour d'un axe fixe situé dans son plan, engendre la surface dont on veut avoir l'aire. D'après ce qu'on a vu n° (137), on pourra considérer cette aire comme la limite de la somme des surfaces de troncs de cônes engendrés par les côtés infiniment petits d'un polygone inscrit dans cet arc.

Or, si l'on représente par y et $y + dy$ les ordonnées correspondantes aux extrémités d'un quelconque de ces côtés ayant pour longueur ds , on aura pour la mesure de la surface du tronc de cône qu'il engendre

$$dS = \pi (2y + dy) ds;$$

on, en négligeant l'infiniment petit du second ordre $\pi dy ds$,

$$dS = 2\pi y ds.$$

Pour l'expression de l'aire engendrée par la révolution d'un arc dont les extrémités correspondent aux abscisses x_0 et x_1 , on aura donc

$$S = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y ds,$$

ou

$$S = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

ou bien encore

$$S = 2\pi \int_{x_0}^{x_1} dx y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}.$$

Ainsi, l'aire d'une surface de révolution s'obtient par une seule intégration.

APPLICATION A L'ELLIPTOÏDE DE RÉVOLUTION.

140. Soit l'ellipse OAB, *fig.* (16), dont l'équation est

$$a^2 y^2 + b^2 x^2 = a^2 b^2;$$

Supposons que cette ellipse tourne autour d'un de ses axes OA, et cherchons l'aire de la surface engendrée par la révolution d'un arc BM de cette courbe, pris depuis le som-

met B jusqu'au point correspondant à l'abscisse quelconque $OP = x$. On aura

$$\sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} = \frac{b \sqrt{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}}{a^2 y},$$

et, par suite,

$$u = 2\pi \int_0^x y dx b \sqrt{\frac{a^4 - (a^2 - b^2)x^2}{a^2 y}}.$$

Supposons d'abord $a > b$, c'est-à-dire que l'ellipse tourne autour de son grand axe; et posons

$$\sqrt{a^2 - b^2} = ae.$$

L'expression précédente de S deviendra

$$S = 2\pi \frac{b}{a} \int_0^x dx \sqrt{a^2 - e^2 x^2},$$

ou

$$S = \frac{2\pi be}{a} \int_0^x dx \sqrt{\frac{a^2}{e^2} - x^2}.$$

Mais

$$2 \int_0^x dx \sqrt{\frac{a^2}{e^2} - x^2} = x \sqrt{\frac{a^2}{e^2} - x^2} + \frac{a^2}{e^2} \arcsin \frac{ex}{a}.$$

Donc

$$S = \frac{\pi be}{a} \left(x \sqrt{\frac{a^2}{e^2} - x^2} + \frac{a^2}{e^2} \arcsin \frac{ex}{a} \right).$$

Si l'on fait $x = a$, on aura pour l'aire de la moitié de la surface de l'ellipsoïde

$$\pi b^2 + \frac{\pi ba}{e} \arcsin e.$$

La surface entière sera donc égale au double de cette expression ou à

$$2\pi b^2 + \frac{2\pi ba}{e} \arcsin e.$$

Si $e=0$, l'ellipsoïde devient une sphère; et comme $\frac{\text{arc sin } e}{e}$ tend vers l'unité à mesure que e tend vers zéro, on trouve $4\pi a^2$ pour la surface de la sphère de rayon a .

Supposons maintenant $a < b$, c'est-à-dire que l'ellipse tourne autour de son petit axe; et posons

$$\sqrt{b^2 - a^2} = be.$$

On aura d'abord

$$S = 2\pi \int_0^x y dx \frac{b\sqrt{a^2 + (b^2 - a^2)x^2}}{a^2 y},$$

et, ensuite,

$$S = \frac{2\pi b}{a^2} \int_0^x dx \sqrt{a^2 + b^2 e^2 x^2} = \frac{2\pi b^2 e}{a^2} \int_0^x dx \sqrt{\frac{a^2}{b^2 e^2} + x^2}.$$

Mais

$$2 \int_0^x dx \sqrt{\frac{a^2}{b^2 e^2} + x^2} = x \sqrt{\frac{a^2}{b^2 e^2} + x^2} + \frac{a^2}{b^2 e^2} l \left(\frac{x + \sqrt{\frac{a^2}{b^2 e^2} + x^2}}{\frac{a^2}{be}} \right).$$

Donc

$$S = \frac{\pi b^2 e}{a^2} \left[x \sqrt{\frac{a^2}{b^2 e^2} + x^2} + \frac{a^2}{b^2 e^2} l \left(\frac{x + \sqrt{\frac{a^2}{b^2 e^2} + x^2}}{\frac{a^2}{be}} \right) \right].$$

En faisant $x=a$, on trouve pour l'aire de la moitié de la surface de l'ellipsoïde,

$$\pi b \sqrt{a^2 + b^2 e^2} + \frac{\pi a^2}{e} l \left(\frac{be + \sqrt{a^2 + b^2 e^2}}{a} \right).$$

L'aire de la surface entière sera donc égale au double de cette expression.

En supposant $e=0$, on retrouve encore la surface de la sphère.

AIRE DES SURFACES COURBES EN COORDONNÉES POLAIRES.

141. Nous allons chercher maintenant l'aire d'une surface courbe rapportée à des coordonnées polaires. Soit M un point quelconque de cette surface déterminé par les trois coordonnées r, θ, ψ . Construisons la sphère qui a pour rayon r , pour centre l'origine des coordonnées, et considérons l'élément superficiel, déterminé, sur cette sphère, par l'intersection des surfaces infiniment voisines appartenant au système des équations $\theta = c', \psi = c''$. Cet élément $d\omega$ aura pour expression $r^2 \sin \theta d\theta d\psi$, et sera la projection orthogonale, sur la sphère, de celui dS déterminé, sur la surface courbe proposée, par le système de surfaces dont nous parlons. En nommant λ l'angle que forme le rayon vecteur mené de l'origine au point M de la surface avec la normale de cette surface, on aura donc

$$dS = \frac{r^2 \sin \theta d\theta d\psi}{\cos \lambda}.$$

Maintenant, si l'on rapporte la surface proposée aux deux côtés $r d\theta, r \sin \theta d\psi$ de l'élément $d\omega$ qui, avec le rayon r , forment un système d'axes rectangulaires, on aura pour l'accroissement de r correspondant à l'extrémité du côté $r d\theta$, $dr = \frac{dr}{d\theta} d\theta$; et pour celui correspondant à l'extrémité du côté $r \sin \theta d\psi$, $dr = \frac{dr}{d\psi} d\psi$. Pour les différentielles partielles de la surface considérée $r = \varphi(\theta, \psi)$, on aura donc, en désignant par p et q ces dérivées, lesquelles ne sont autres choses que les rapports des accroissements successifs de r aux rapports des accroissements de θ et ψ ,

$$p = \frac{\frac{dr}{d\theta} d\theta}{r d\theta} = \frac{1}{r} \frac{dr}{d\theta},$$

$$q = \frac{\frac{dr}{d\psi} d\psi}{r \sin \theta d\psi} = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{dr}{d\psi}.$$

On aura ensuite pour le cosinus de l'angle λ

$$\cos \lambda = \frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}} = \frac{r \sin \theta}{\sqrt{\left(\frac{dr}{d\psi}\right)^2 + \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right] \sin^2 \theta}};$$

et pour la différentielle dS de la surface

$$dS = \sqrt{\left(\frac{dr}{d\psi}\right)^2 + \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right] \sin^2 \theta} r d\theta d\psi.$$

Pour l'expression de l'aire courbe S en coordonnées polaires, on aura donc

$$S = \int \int \sqrt{\left(\frac{dr}{d\psi}\right)^2 + \left[r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2\right] \sin^2 \theta} r d\theta d\psi$$

comme on l'a déjà trouvé n° (79).

LIVRE III.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

CHAPITRE PREMIER.

ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES D'ORDRE QUELCONQUE.

EXISTENCE DE L'INTÉGRALE D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE D'ORDRE QUELCONQUE.

142. On nomme *équation différentielle de l'ordre m* une relation

$$(1) \quad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^m y}{dx^m}\right) = 0$$

entre une variable x , la fonction y de cette variable et les dérivées des divers ordres de cette fonction par rapport à cette variable jusqu'à la m^{me} inclusivement.

Toute équation différentielle de l'ordre m admet une intégrale renfermant m constantes arbitraires; c'est-à-dire qu'il existe toujours une fonction de x , y et de m constantes arbitraires, telle qu'en la différentiant et éliminant ces m constantes, on retrouve l'équation différentielle proposée.

En effet, considérons l'équation différentielle d'ordre m résolue par rapport à la dérivée de cet ordre, et soit

$$\frac{d^m y}{dx^m} = F \left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2} \dots \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} \right).$$

Cette équation déterminera $\frac{d^m y}{dx^m}$ en fonction de $x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}$; et si on la différentie successivement, on obtiendra $\frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}}, \frac{d^{m+2} y}{dx^{m+2}}, \dots$ en fonction des mêmes quantités, savoir :

$$\begin{aligned} \frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}} &= F_1 \left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2} \dots \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} \right), \\ \frac{d^{m+2} y}{dx^{m+2}} &= F_2 \left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2 y}{dx^2} \dots \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} \right) \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Maintenant, si l'on désigne par y la fonction de x satisfaisant à l'équation différentielle (1), et qu'on développe cette fonction y au moyen du théorème de Taylor, en choisissant pour cela la forme générale qui lui a été assignée n° (73, t. I), on aura pour le développement de la fonction y suivant les puissances ascendantes de $x - x_0$

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} y &= y_0 + \left(\frac{dy}{dx} \right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_0 \frac{(x - x_0)^2}{1.2} + \dots + \left(\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} \right)_0 \frac{(x - x_0)^{m-1}}{1.2 \dots (m-1)} \\ &+ \left(\frac{d^m y}{dx^m} \right)_0 \frac{(x - x_0)^m}{1.2 \dots m} + \left(\frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}} \right)_0 \frac{(x - x_0)^{m+1}}{1.2 \dots m+1} + \dots \end{aligned} \right.$$

Tous les coefficients différentiels $\left(\frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}} \right)_0, \left(\frac{d^{m+2} y}{dx^{m+2}} \right)_0$ de ce développement, pris à partir de celui $\left(\frac{d^m y}{dx^m} \right)_0$, seront déterminés, comme on l'a dit, en fonction de $x_0, y_0, \left(\frac{dy}{dx} \right)_0, \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)_0, \dots$

$\left(\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right)_0$ au moyen de l'équation (1), répondant à $x = x_0$, savoir :

$$F\left[x_0, y_0, \left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0, \dots, \left(\frac{d^m y}{dx^m}\right)_0\right] = 0,$$

et l'on aura, en conséquence,

$$(3) \left\{ \begin{aligned} y &= y_0 + \left(\frac{dy}{dx}\right)_0 (x-x_0) + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 \frac{(x-x_0)^2}{1.2} + \dots + \left(\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right)_0 \frac{(x-x_0)^{m-1}}{1.2\dots(m-1)} \\ &+ F\left[x_0, y_0, \left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0, \dots, \left(\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right)_0\right] \frac{(x-x_0)^m}{1.2\dots m} \\ &+ F_1\left[x_0, y_0, \left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0, \dots, \left(\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right)_0\right] \frac{(x-x_0)^{m+1}}{1.2\dots m+1} \\ &+ F_2\left[x_0, y_0, \left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0, \dots, \left(\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right)_0\right] \frac{(x-x_0)^{m+2}}{1.2\dots m+2} \\ &+ \dots \end{aligned} \right.$$

Ce développement représente l'intégrale générale de l'équation différentielle proposée (1) ; et comme il se compose des m coefficients $x_0, y_0, \left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0, \dots, \left(\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right)_0$, dont rien ne détermine la valeur, en sorte qu'ils demeurent quelconques et y figurent, par conséquent, à l'état de constantes arbitraires, on en conclut que l'intégrale générale d'une équation différentielle de l'ordre m , renferme m constantes arbitraires sous la forme ordinaire

$$(4) \quad f(x, y, c_1, c_2, c_3, \dots, c_m) = 0,$$

Et réciproquement, toute équation $F(x, y, c_1, c_2, c_3, \dots, c_m) = 0$ qui satisfait à l'équation différentielle proposée et qui renferme m constantes arbitraires, au moyen desquelles il soit possible de donner des valeurs arbitraires $y_0, \left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0, \dots, \left(\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right)_0$, à la fonction y et à ses $m-1$ premières dérivées, pour une valeur x_0 de x , est identique avec l'intégrale générale représentée par le développement (3). En effet, si l'on détermine

de cette manière les constantes arbitraires, on obtiendra pour y le développement (3), puisque l'équation (4) satisfaisant à l'équation différentielle proposée (1), les valeurs des coefficients $\frac{d^m y}{dx^m}, \frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}}, \dots$, pour la valeur $x = x_0$, ne dépendront plus que des valeurs arbitraires $y_0, \left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \left(\frac{d^2 y}{dx^2}\right)_0, \dots, \left(\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}}\right)_0$.

En donnant des valeurs particulières à une ou plusieurs constantes renfermées dans l'intégrale générale (4), on obtiendra des *intégrales particulières*.

INTÉGRALES DES DIVERS ORDRES.

143. Soit

$$(1) \quad f(x, y, c_1, c_2, c_3, \dots, c_m) = 0$$

l'intégrale générale d'une équation différentielle d'ordre m . Si entre cette équation et celle qu'on en tire par la différentiation, on élimine une des m constantes arbitraires, $c_1, c_2, \dots, c_m$, qu'elle renferme, on obtiendra une équation différentielle du premier ordre renfermant $m-1$ constantes arbitraires, et cette équation sera dite *intégrale de l'ordre $m-1$* . Le nombre d'intégrales d'ordre $m-1$ que l'on pourra obtenir ainsi en éliminant successivement chacune des m constantes, sera égal à m .

En différentiant deux fois de suite l'équation (1) et éliminant ensuite entre cette équation et celles qui en résultent par la différentiation, deux constantes arbitraires, on obtiendra une équation différentielle du second ordre renfermant $m-2$ constantes arbitraires, et cette équation sera dite *intégrale de l'ordre $m-2$* . Le nombre d'intégrales que l'on pourra obtenir ainsi sera exprimé par $\frac{m(m-1)}{1.2}$.

On voit par là comment on parviendrait aux intégrales de

l'ordre $m-3$, $m-4$, etc. En différentiant l'équation (1) $m-1$ fois et éliminant successivement $m-1$ constantes, on aura m équations différentielles de l'ordre $m-1$ qui renfermeront chacune une constante arbitraire. Ces équations seront dites *intégrales premières ou du premier ordre*; et si entre ces $m-1$ intégrales, on élimine les $m-1$ dérivées $\frac{dy}{dx}$,

$\frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$, on retombera sur l'équation primitive (1).

De là résulte que pour obtenir l'intégrale générale de l'équation différentielle

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \dots \frac{d^m y}{dx^m}\right) = 0,$$

il suffit d'avoir les m équations intégrales du premier ordre qui remplacent cette intégrale.

CONDITIONS QUE DOIT REMPLIR UNE FONCTION POUR ÊTRE L'INTÉGRALE GÉNÉRALE D'UNE ÉQUATION DIFFÉRENTIELLE D'ORDRE m .

144. Pour qu'une fonction soit l'intégrale générale d'une équation différentielle d'ordre m , il faut, comme on l'a dit, que cette fonction renferme m constantes arbitraires; mais encore faut-il que ces constantes ne puissent être réduites à un nombre moindre par des transformations. On s'assure, d'ailleurs, bien aisément, que ce nombre m de constantes ne peut être réduit, et, par conséquent, que la fonction constitue bien l'intégrale générale de l'équation différentielle proposée, en différentiant $m-1$ fois cette fonction et cherchant à déterminer les m constantes de telle sorte qu'il soit possible d'en tirer, pour une certaine valeur donnée x_0 de x , des valeurs tout à fait arbitraires $y_0, \left(\frac{dy}{dx}\right)_0, \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0, \dots, \left(\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}\right)_0$, de y et de ses $m-1$ premières dérivées $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$.

Par exemple, si l'on prend la fonction

$$(1) \quad y = ce^{ax} + c'e^{a'x}$$

renfermant deux constantes c et c' , et qu'on la différentie, on aura

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = ace^{ax} + a'c'e^{a'x},$$

et quelle que soit la valeur que l'on donne à x , les équations (1) et (2) donneront pour c et c' des valeurs finies et déterminées, si a' est différent de a . D'où l'on conclut que, dans ce cas, l'équation (1) est bien l'intégrale générale d'une équation différentielle du second ordre.

De même, si l'on avait

$$(1) \quad y = c \sin ax + c' \cos ax,$$

on en déduirait

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = ac \cos ax - ac' \sin ax,$$

et ces deux équations donnant encore pour c et c' des valeurs finies et déterminées, on en conclurait que cette équation (1) est l'intégrale générale d'une équation différentielle du second ordre.

Mais si l'on a pour y une expression de la forme

$$(1) \quad y = c \sin (x + a) + c' \sin (x + a') + c'' \sin (x + a''),$$

en la différentiant deux fois de suite, on aura

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} = c \cos (x + a) + c' \cos (x + a') + c'' \cos (x + a''),$$

$$(3) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -c \sin (x + a) - c' \sin (x + a') - c'' \sin (x + a''),$$

et comparant les équations (1) et (3), on en déduira

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -y.$$

La valeur de y étant déterminée, on ne pourra pas donner de valeurs arbitraires à $\frac{d^2y}{dx^2}$. Il en résulte que l'équation (1), quoique contenant trois constantes arbitraires, ne sera pas l'intégrale générale d'une équation différentielle du troisième ordre; et c'est d'ailleurs ce qui peut être rendu bien évident, en développant dans l'équation (1) les sinus que cette équation renferme; car on a

$$y = (c \cos a + c' \cos a' + c'' \cos a'') \sin x \\ + (c \sin a + c' \sin a' + c'' \sin a'') \cos x;$$

et les constantes étant alors réduites à deux, qui sont les coefficients de $\sin x$ et de $\cos x$, on voit que l'équation (1) appartient réellement à une équation différentielle du second ordre.

CHAPITRE II.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE PAR LA SÉPARATION DES VARIABLES.

145. L'intégration des équations différentielles du premier ordre à deux variables représentées généralement par

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0, \quad \text{ou} \quad Mdx + Ndy = 0,$$

M et N étant des fonctions de x et y , s'effectue immédiatement, et se ramène aux quadratures, lorsque les variables x et y peuvent être séparées, c'est-à-dire lorsqu'il est possible de mettre l'équation proposée sous la forme

$$(1) \quad \varphi(x)dx + f(y)dy = 0,$$

car alors, d'après ce qui a été dit antérieurement, on a

$$\int \varphi(x)dx + \int f(y)dy + C,$$

C désignant une constante. C'est donc à la forme (1) que l'on doit chercher à ramener toute équation différentielle du premier ordre. Or, c'est ce que l'on peut toujours faire dans trois cas distincts que nous allons examiner successivement.

146. *Equations de la forme* $\varphi(x)dy + f(y)dx = 0$. — Le cas le plus simple est celui où l'équation donnée se présente sous la forme $\varphi(x)dy + f(y)dx = 0$, ou plus généralement sous celle

$$\varphi(x) F(y)dx + f(y) \psi(x)dy = 0,$$

car alors, en divisant ses deux membres successivement par $F(y)$, $\psi(x)$, on obtient

$$\frac{\varphi(x)}{\psi(x)} dx + \frac{f(y)}{F(y)} dy = 0,$$

équation dans laquelle $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ est une fonction de x seulement, et $\frac{f(y)}{F(y)}$ une fonction de y seule; ce qui ramène cette équation à la forme (1).

EXEMPLES. Soit l'équation différentielle très-simple

$$(1) \quad ydx - xdy = 0.$$

En divisant ses deux termes par xy , on a

$$\frac{dx}{x} + \frac{dy}{y} = 0,$$

et, en intégrant,

$$lx - ly = C, \quad \text{ou} \quad l \frac{x}{y} = C,$$

Si l'on regarde la constante arbitraire C comme un logarithme, ce qui est permis, on aura

$$l \frac{x}{y} = lC,$$

et, par conséquent, en passant aux nombres

$$\frac{x}{y} = C_1, \quad \text{ou} \quad x = C_1 y.$$

Soit encore

$$(2) \quad \sqrt{a-y^2} dx - \sqrt{b-x^2} dy = 0.$$

En divisant successivement cette équation par $\sqrt{a-x^2}$ et par $\sqrt{b-y^2}$, il vient

$$\frac{dx}{\sqrt{b-x^2}} - \frac{dy}{\sqrt{a-y^2}} = 0.$$

Intégrant, on a

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{b}} - \arcsin \frac{y}{\sqrt{a}} = C,$$

ou, parce que C est arbitraire,

$$\arcsin \frac{x}{\sqrt{b}} - \arcsin \frac{y}{\sqrt{a}} = \arcsin C_1.$$

Soit enfin l'équation

$$(3) \quad x^2 dy = (y+a) dx,$$

En divisant par x^2 et $y+a$, on a

$$\frac{dy}{y+a} = \frac{dx}{x^2},$$

d'où

$$\ln(y+a) = C - \frac{1}{x},$$

et, par conséquent,

$$y+a = e^{C-\frac{1}{x}}.$$

147. *Équations homogènes.* — La séparation des variables est encore possible, et l'intégration est ramenée par conséquent aux quadratures, lorsque l'équation

$$Mdx + Ndy = 0$$

est homogène, c'est-à-dire quand M et N sont des fonctions homogènes et du même ordre m de deux variables x et y .

En effet, posons

$$y = xz,$$

z étant une nouvelle variable. Les fonctions M et N deviendront

$$M = x^m \varphi(z), \quad N = x^m \psi(z),$$

et l'on aura en conséquence

$$x^m \varphi(z) dx + x^m \psi(z) dy = 0,$$

ou

$$\varphi(z) dx + \psi(z) dy = 0,$$

ou bien encore, en remplaçant dy par sa valeur $x dz + z dx$ tirée de l'équation $y = xz$,

$$\varphi(z) dx + \psi(z) (x dz + z dx) = 0.$$

On déduit de là

$$\frac{dx}{x} + \frac{\psi'(z) dz}{\varphi(z) + z \psi(z)} = 0,$$

et dans cette équation les variables sont séparées

On a donc

$$\int \frac{dx}{x} + \int \frac{\psi'(z) dz}{\varphi(z) + z \psi(z)} = C,$$

et, par suite,

$$\ln x + \int \frac{\psi'(z) dz}{\varphi(z) + z \psi(z)} = C.$$

148. On peut quelquefois, par une simple transformation, ramener à la forme homogène une équation qui ne l'est pas. C'est ce qui a lieu, par exemple, pour l'équation non homogène

$$(1) \quad (a + mx + ny) dx + (b + px + qy) dy = 0.$$

En effet, si l'on pose

$$x = x' + a, \quad y = y' + b, \quad \text{d'où} \quad dx = dx', \quad dy = dy'$$

on aura, en substituant ces valeurs dans la proposée,

$$(a + mx + n\epsilon + mx' + ny')dx' + (b + px + q\epsilon + px' + qy')dy' = 0;$$

et, si pour déterminer α et ϵ , on fait maintenant

$$a + mx + n\epsilon = 0,$$

$$b + px + q\epsilon = 0,$$

on obtiendra

$$\alpha = \frac{bn - aq}{mq - np}, \quad \epsilon = \frac{ap - bm}{mp - np},$$

et, par suite,

$$(mx' + ny')dx' + (px' + qy')dy' = 0,$$

équation homogène par rapport à x' et à y' .

149. Cette transformation est impossible quand $mq - np = 0$; car dans ce cas α et ϵ deviennent infinies. Mais alors on a $q = \frac{np}{m}$, et la proposée devient

$$m(a + mx + ny)dx + [mb + (mx + ny)p]dy = 0,$$

équation dont on sépare les variables en posant $mx + ny = z$, d'où $dy = \frac{dz - m dx}{n}$; ce qui donne

$$m(a + z)dx + (bm + pz) \frac{dz - m dx}{n} = 0,$$

et

$$m dx = \frac{(bm + pz) dz}{bm - an + (p - n)z},$$

en sorte que le problème est encore ramené aux quadratures.

150. On peut aussi rendre l'équation (1) homogène, en posant

$$a + mx + ny = u, \quad b + px + qy = t;$$

d'où

$$m dx + n dy = du, \quad p dx + q dy = dt$$

et

$$dx = \frac{qdu - ndt}{mq - np}, \quad dy = \frac{mdt - pdu}{mq - np},$$

car alors la proposée devient

$$udy + tdx = 0$$

ou

$$(mt - nu) dt + (qu - pt) du = 0$$

équation homogène en t et u .

EXEMPLES. — Soit d'abord

$$(1) \quad xdx + ydy = mydx,$$

équation que l'on peut mettre sous la forme :

$$(x - my) dx + ydy = 0.$$

En posant

$$y = xz,$$

on trouve

$$lx = \int \frac{zdz}{1 - mz + z} = C.$$

Mais

$$\frac{zdz}{1 - mz + z} = \frac{1}{2} \frac{2zdz - mdz}{1 - mz + z^2} + \frac{1}{2} \frac{mdz}{1 - mz + z^2}.$$

Donc

$$lx + \frac{1}{2} l(1 - mz + z^2) + \frac{1}{2} \int \frac{mdz}{1 - mz + z^2} + C.$$

Soit encore

$$(2) \quad xdy - ydx = dx \sqrt{x^2 + y^2}.$$

En posant

$$y = xz,$$

on obtient

$$\frac{dx}{x} = \frac{dz}{\sqrt{1 + z^2}},$$

et, en intégrant les deux membres,

$$lx = lC(z + \sqrt{1+z^2})$$

ou

$$\frac{x}{z + \sqrt{1+z^2}} = C_1;$$

remplaçant ensuite z par sa valeur $\frac{y}{x}$, et faisant disparaître le radical, on trouve

$$x^2 = 2Cy + C^2.$$

Cette intégration est la solution de cette question : trouver une courbe telle que le rayon vecteur OM, mené de l'origine O à un point quelconque M de cette courbe, soit égal au segment OT compris entre l'origine et le point où la tangente rencontre l'axe des y . On trouve, d'après l'équation (2), que cette propriété appartient à toutes les paraboles qui ont pour axe Oy et pour foyer l'origine O.

Soit enfin

$$(3) \quad \int y dx = \frac{y^2}{x}.$$

En différentiant, on a

$$y dx = \frac{3y^2 x dy - y^2 dx}{x^2},$$

et, intégrant,

$$(4) \quad (x^2 - 2y^2)^2 = Cx^2.$$

On arrive à ce résultat lorsqu'on cherche quelle est la courbe dont l'aire est égale au cube de l'ordonnée qui la termine, divisé par l'abscisse correspondante. D'après l'équation (4), on voit que cette courbe est la parabole.

151. Équations linéaires. — Il est encore un cas très-étendu où la séparation des variables peut être effectuée; c'est celui où l'équation est *linéaire et du premier ordre*.

On nomme ainsi toute équation différentielle de la forme

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} + Py = Q \quad \text{ou} \quad dy + Py dx = Q dx$$

dans laquelle P et Q sont des fonctions quelconques de x .

Pour intégrer cette équation, posons

$$y = uz,$$

u et z étant des fonctions indéterminées de x ; on aura

$$dy = u dx + z du,$$

et substituant cette valeur dans la proposée, il viendra

$$udz + zdu + Puzdx = Qdx$$

Or, u et z étant des fonctions indéterminées de x , on peut poser

$$du + P u dx = 0, \quad u dz = Q dx.$$

La première de ces équations divisée par u donne

$$\frac{du}{u} + P dx = 0;$$

d'où, en intégrant,

$$lu + \int P dx = 0,$$

et en passant aux nombres

$$u = e^{-\int P dx}.$$

Substituant cette valeur de u dans la seconde, on en déduit

$$dz = e^{\int P dx} Q dx,$$

et, par suite,

$$z = \int e^{\int P dx} Q dx + C.$$

Donc

$$(2) \quad y = uz = e^{-\int P dx} \left[\int e^{\int P dx} Q dx + C \right].$$

152. On ramène aux équations linéaires du premier ordre celles comprises dans la suivante étudiée d'abord par Jacques Bernoulli et qui porte son nom :

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^m, \quad \text{ou} \quad y^{-m} \frac{dy}{dx} + Py^{1-m} = Q.$$

En effet, si l'on pose

$$z = \frac{y^{1-m}}{1-m}; \quad \text{d'où} \quad dz = y^{-m} dy,$$

on obtient, en substituant dans la proposée et réduisant,

$$\frac{dz}{dx} + (1-m)Pz = Q \quad \text{ou} \quad dz + (1-m)Pz dx = Q dx$$

équations de même forme que celles (1).

153. On peut, au reste, appliquer directement à l'équation proposée la transformation dont nous avons fait usage pour l'équation linéaire (1).

En effet, posons

$$y = uz; \quad \text{d'où} \quad \frac{dy}{dx} = u \frac{dz}{dx} + z \frac{du}{dx}$$

On aura

$$u \frac{dz}{dx} + z \left(\frac{du}{dx} + Pu \right) Q = u^n z^n,$$

équation qui se partage dans les deux suivantes :

$$\frac{du}{dx} P + u = 0, \quad \frac{dz}{dx} = Qu^{n-1} z^n$$

On tire de la première, comme au n° (151),

$$u = z e^{-\int P dz}$$

et de la seconde, eu égard à celle-ci,

$$\frac{dz}{z^n} = Q e^{(1-n) \int P dx} dx;$$

puis

$$z^{1-n} = (1-n) \left[\int Q e^{(1-n) \int P dx} dx + C \right].$$

On a donc

$$y^{1-n} = (1-n) e^{(n-1) \int P dx} \left[\int Q e^{(1-n) \int P dx} dx + C \right].$$

154. On peut encore obtenir l'intégrale générale d'une équation de la forme

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} + Py = Qy^2 + R$$

quand on en connaît une intégrale particulière. Car soit u une fonction de x qui satisfasse à l'équation (1) sans renfermer de constante arbitraire; et posons $y = u + z$. Comme par hypothèse, on a

$$\frac{du}{dx} + Pu = Qu^2 + R$$

l'équation proposée (1) se trouvera ramenée à celle

$$\frac{dz}{dx} + (P - 2Qu)z = Qz^2,$$

et sous cette forme elle sera intégrable, d'après ce qui a été dit au n° (152)

Par exemple, l'équation

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^2 + 1 + Px - Qx^2$$

est satisfaite par $y = x$, et en posant $y = x + z$, cette équation se ramène à la suivante :

$$\frac{dz}{dx} + (P + 2Qx)z = Qz^2$$

que l'on sait intégrer n° (152).

APPLICATIONS. — Soit l'équation

$$\frac{dy}{dx} + \frac{y}{x} = x^3.$$

En comparant cette équation avec celle (2), on a

$$P = \frac{1}{x}, \quad Q = x^3, \quad \int P dx = \int \frac{dx}{x} = \ln x,$$

On a, par suite,

$$e^{\int P dx} = e^{\ln x} = x, \quad e^{-\int P dx} = e^{-\ln x} = -\frac{1}{x},$$

$$\int e^{\int P dx} Q dx = \int x^4 dx = \frac{x^5}{5} + C.$$

Donc

$$y = \frac{1}{x} \left(\frac{x^5}{5} + C \right)$$

Soit encore

$$dy - \frac{ay}{1-x} dx - b dx = 0.$$

Comparant cette équation avec celle (2), on a

$$P = -\frac{a}{1-x} q = -b;$$

donc

$$\int P dx = a \ln(1-x),$$

$$e^{-\int P dx} = e^{a \ln(1-x)} = \frac{1}{(1-x)^a},$$

$$e^{\int P dx} = (1-x)^a,$$

$$\begin{aligned}\int e^{\int P dx} Q dx &= -b \int (1-x)^a dx \\ &= b \int (1-x)^a d(1-x) = \frac{b(1-x)^{a+1}}{a+1},\end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$y = \frac{1}{(1-x)^a} \left[\frac{b(1-x)^{a+1}}{a+1} + C \right]$$

Soit enfin

$$dy + ay dx + be^{px} dx = 0.$$

On a

$$P = a, \quad Q = be^{px};$$

d'où

$$\begin{aligned}\int P dx &= ax, \quad e^{-\int P dx} = e^{-ax}, \quad e^{\int P dx} = e^{ax} \\ \int e^{\int P dx} Q dx &= b \int e^{(p+a)x} dx = \frac{b}{a+p} e^{(a+p)x},\end{aligned}$$

et par suite, en substituant dans celle (2),

$$y = e^{-ax} \left[\frac{be^{(a+p)x}}{a+p} + C \right].$$

DU FACTEUR PROPRE À RENDRE INTÉGRABLE LE PREMIER MEMBRE
DE L'ÉQUATION $Mdx + Ndy = 0$.

155. Démontrons d'abord l'existence de ce facteur. Soit.

$$Mdx + Ndy = 0$$

l'équation différentielle proposée. On sait que cette équation admet toujours une intégrale renfermant une constante arbitraire sous la forme

$$F(x, y, c) = 0$$

ou sous celle

$$\Psi(x, y) = c.$$

Or, si l'on différencie cette équation, on aura

$$\frac{d\varphi}{dx} dx + \frac{d\varphi}{dy} dy = 0;$$

et comme la valeur de $\frac{dy}{dx}$, tirée de cette équation, ou $\frac{\frac{dx}{d\varphi}}{\frac{dy}{d\varphi}}$, doit

être égale à celle $-\frac{M}{N}$ que donne la proposée, on en conclut

$$\frac{M}{N} = \frac{\frac{dx}{d\varphi}}{\frac{dy}{d\varphi}}; \quad \text{d'où} \quad \frac{d\varphi}{dx} = \frac{d\varphi}{dy} \cdot \frac{N}{M}.$$

En nommant v chacun de ces quotients, on aura donc

$$\frac{d\varphi}{dx} = Mv, \quad \frac{d\varphi}{dy} = Nv,$$

et, par conséquent,

$$du = v(Mdx + Ndy).$$

Ainsi, il existe toujours un facteur v propre à rendre $Mdx + Ndy$ une différentielle exacte.

156. Si l'on multiplie les deux membres de l'équation

$$v(Mdx + Ndy) = du$$

par une fonction quelconque de u que nous désignerons par $\psi(u)$, on aura.

$$v\psi(u)(Mdx + Ndy) = \psi(u) du,$$

équation dont le second membre est encore une différentielle exacte. Ainsi, les facteurs v et $\psi(u)$ jouissent de la même propriété.

Donc, dans l'hypothèse d'un facteur v propre à rendre intégrable le premier membre de l'équation $Mdx + Ndy = 0$, il en existe une infinité d'autres jouissant de la même propriété.

157. Il est aisé de démontrer que, réciproquement, si V est un facteur propre à rendre intégrable le premier membre de l'équation (1), ce facteur sera de la forme $v^{\frac{1}{v}}(u)$

En effet, soit

$$V(Mdx + Ndy) = dU.$$

Comme

$$v(Mdx + Ndy) = du,$$

il en résulte

$$dU = \frac{V}{v} du,$$

et, par suite,

$$(1) \quad \frac{dU}{dx} = \frac{V}{v} \frac{du}{dx}, \quad \frac{dU}{dy} = \frac{V}{v} \frac{du}{dy}.$$

Maintenant, si de l'équation

$$u = f(x, y)$$

on tire la valeur de y en fonction de u et de x qu'elle détermine, et qu'on porte cette valeur de y dans celle de U qui deviendra alors $V = \Phi(u, x)$, on aura en différentiant

$$\frac{dU}{dx} = \frac{d\Phi}{du} \frac{du}{dx} + \frac{d\Phi}{dx}, \quad \frac{dU}{dy} = \frac{d\Phi}{du} \frac{du}{dy},$$

et, par conséquent, en comparant avec les équations (1),

$$\frac{d\Phi}{du} = \frac{V}{v}, \quad \frac{d\Phi}{dx} = 0.$$

La dérivée de Φ par rapport à x étant nulle, il en résulte que x n'entre pas explicitement dans cette fonction. Donc cette fonction Φ , et par suite $\frac{d\Phi}{du} = \frac{V}{v}$ est une fonction de u seulement, en sorte que l'on a

$$\frac{V}{v} = \phi(u) \quad \text{ou} \quad V = v\phi(u);$$

ce qu'il fallait démontrer.

158. Il suit de là que, si V et v sont deux facteurs propres à rendre intégrable le premier membre de l'équation $Mdx + Ndy = 0$, le rapport de ces facteurs égalé à une constante sera l'intégrale générale de cette équation. Car de

$$\frac{V}{v} = c \quad \text{ou} \quad \phi(u) = c,$$

on tire

$$u = c.$$

159. L'existence du facteur v étant démontrée, il nous faut chercher maintenant à le déterminer. Or, si l'on remarque que, en vertu de sa définition même, ce facteur doit être tel que l'équation $v(Mdx + Ndy)$ vérifie l'identité

$$\frac{dvM}{dx} = \frac{dvN}{dy},$$

on aura, en développant, pour l'équation qui doit le déterminer,

$$M \frac{dv}{dy} + v \frac{dM}{dy} = N \frac{dv}{dx} + v \frac{dN}{dx},$$

ou ce qui revient au même

$$(1) \quad N \frac{dv}{dx} - M \frac{dv}{dy} = v \left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} \right).$$

Lorsque v est une fonction de x et y , cette équation est aux différentielles partielles et beaucoup plus difficile, en général, à intégrer que la proposée. Mais lorsque v n'est fonction que de l'une des deux variables, de x , par exemple, alors il est facile d'en obtenir l'expression. On a, dans ce cas, $\frac{dv}{dy} = 0$, ce qui réduit l'équation (1) à celle

$$N \frac{dv}{dx} = v \left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} \right),$$

ou

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dx} = \frac{1}{N} \left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} \right);$$

et comme, par hypothèse, le premier membre $\frac{1}{v} \frac{dv}{dx}$ est une fonction de x , il doit en être de même du second $\frac{1}{N} \left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} \right)$; en sorte que

$$\frac{1}{N} \left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} \right) = \varphi(x).$$

On a donc

$$\frac{1}{v} \frac{dv}{dx} = \varphi(x) \quad \text{ou} \quad \frac{dv}{v} = \varphi(x) dx$$

et, par conséquent, en intégrant

$$lv = \int \varphi(x) dx$$

ou

$$v = e^{\int \varphi(x) dx}.$$

160. Appliquons ce qui précède à la recherche du facteur propre à rendre intégrable l'équation linéaire du premier ordre

$$dy + Pydx = Qdx$$

que l'on peut mettre sous la forme

$$dy + (Py - Q)dx = 0,$$

P et Q étant des fonctions de la seule variable x ; on aura

$$M = (Py - Q), \quad N = 1, \quad \frac{1}{N} \left(\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx} \right) = P,$$

et le facteur intégrant v sera ici :

$$v = e^{\int P dx}.$$

En effet, si l'on multiplie l'équation proposée par $e^{\int P dx}$, on trouvera

$$e^{\int P dx} dy + (Py - Q)e^{\int P dx} dx = du,$$

du désignant une différentielle exacte.

Intégrant ensuite le terme $e^{\int P dx} dy$ par rapport à x , on a

$$u = ye^{\int P dx} + X,$$

X désignant une fonction de x , fonction qui sera déterminée par l'équation

$$\frac{dye^{\int P dx}}{dx} + \frac{dX}{dx} = (Py - Q)e^{\int P dx},$$

d'où l'on tire

$$\frac{dX}{dx} = -e^{\int P dx} Q, \quad \text{et} \quad X = -\int e^{\int P dx} Q dx.$$

On a donc

$$u = ye^{\int P dx} - \int e^{\int P dx} Q dx = C,$$

et, par suite

$$y = e^{-\int P dx} \left[\int e^{\int P dx} Q dx + C \right],$$

expression qui est bien celle de l'intégrale générale de l'équation linéaire du premier ordre, trouvée n° (151)

161. Le facteur propre à rendre intégrable le premier membre de l'équation

$$(1) \quad Mdx + Ndy = 0,$$

lorsqu'elle est homogène, est facile à obtenir. En effet, en revenant aux calculs qui nous ont conduits à la différentielle exacte

$$(2) \quad \frac{dx}{x} + \frac{\varphi(z) dz}{\varphi(z) + z\psi(z)} = 0,$$

on reconnaît que cette équation différentielle a été obtenue en divisant l'équation proposée d'abord par x^m , puis par $x[\varphi(z) + z\psi(z)]$; c'est-à-dire par

$$x[x^m\varphi(z) + x^m z\psi(z)],$$

équation qui revient à celle

$$Mx + Ny.$$

En remplaçant z par $\frac{y}{x}$, $x^m\varphi\left(\frac{y}{x}\right)$ par M , et $x^m\psi\left(\frac{y}{x}\right)$ par N , l'équation (2) revient donc à

$$\frac{Mdx + Ndy}{Mx + Ny} = 0,$$

et l'on en conclut que le facteur propre à rendre, dans ce cas, $Mdx + Ndy$ une différentielle exacte, est

$$v = \frac{1}{Mx + Ny}.$$

Il est facile, d'ailleurs, de s'assurer que ce facteur $\frac{1}{Mx + Ny}$ est bien celui qui jouit de la propriété de rendre la proposée une différentielle exacte, dans l'hypothèse où cette équation est homogène. Il suffit, en effet, pour cela, de prouver que

$$d \frac{M}{Mx + Ny} = d \frac{N}{Mx + Ny}.$$

Or, on a

$$d \frac{M}{Mx + Ny} = \frac{1}{(Mx + Ny)^2} \left(Ny \frac{dM}{dy} - My \frac{dN}{dy} - MN \right),$$

$$d \frac{N}{Mx + Ny} = \frac{1}{(Mx + Ny)^2} \left(Mx \frac{dN}{dx} - Nx \frac{dM}{dx} - MN \right),$$

en sorte que l'équation ci-dessus peut être remplacée par la suivante :

$$N \left(x \frac{dM}{dx} + y \frac{dM}{dy} \right) - M \left(x \frac{dN}{dx} + y \frac{dN}{dy} \right) = 0.$$

Mais les fonctions M et N étant homogènes et de degré m , on a tome I, n° (89)

$$x \frac{dM}{dx} + y \frac{dM}{dy} = Mm,$$

$$x \frac{dN}{dx} + y \frac{dN}{dy} = Nm.$$

Donc

$$NMm - NMm = 0,$$

ou

$$d \frac{M}{Mx + Ny} = d \frac{N}{Mx + Ny},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Si le premier membre de l'équation homogène $Mdx + Ndy = 0$ est une différentielle exacte, 1 et $\frac{1}{Mx + Ny}$ seront les deux facteurs qui rendront ce premier membre intégrable; et en égalant à une constante le rapport de ces deux facteurs, on obtiendra l'intégrale générale, qui sera alors égale à

$$Mx + Ny = C.$$

EXERCICES.

Trouver le facteur intégrant de l'équation

$$(1) \quad (x + y)dx + dy = 0.$$

Solution :

$$v = e^x.$$

Trouver le facteur intégrant de l'équation

$$(2) \quad dx + (adx + 2bydy)(1+x^2)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Solution :

$$v = \frac{1}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}.$$

Trouver le facteur intégrant de l'équation

$$(3) \quad x^3dy + \left[4x^2y - \frac{1}{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} \right] dx = 0.$$

Solution :

$$v = x.$$

CHAPITRE III.

RÉSOLUTION DE QUELQUES PROBLÈMES GÉOMÉTRIQUES.

PROBLÈME DES TRAJECTOIRES.

162. Ce problème consiste à *trouver une courbe qui coupe, sous un angle donné toutes celles renfermées dans l'équation également donnée :*

$$(1) \quad F(x, y, a) = 0$$

a étant un paramètre susceptible de prendre toutes les valeurs possibles.

Soient x et y les coordonnées d'un point quelconque M, fig. (17), commun à la trajectoire AB et à l'une des courbes CD, produite par la variation de a . Désignons par m la tangente de l'angle donné, qui est celui formé par les tangentes menées à ces deux courbes par le point M (x, y), et par α et α' les angles que forment ces tangentes MT, MT', avec l'axe des x . On aura

$$(2) \quad m = \frac{\tan \alpha - \tan \alpha'}{1 + \tan \alpha \tan \alpha'}.$$

Mais

$$\tan \alpha = \frac{dy}{dx} \quad \tan \alpha' = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}}.$$

Donc

$$(3) \quad m \left(\frac{dF}{dy} - \frac{dF}{dx} \frac{dy}{dx} \right) = \frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} \frac{dy}{dx}.$$

En éliminant a entre cette équation et celle (1), on obtiendra l'équation différentielle du lieu, ou celle de la trajectoire cherchée.

163. Soit, par exemple,

$$(4) \quad y^n = ax^p.$$

On aura

$$\frac{dF}{dx} = -apx^{p-1}, \quad \frac{dF}{dy} = ny^{n-1}$$

et, par suite,

$$m \left(ny^{n-1} + apx^{p-1} \frac{dy}{dx} \right) - ny^{n-1} \frac{dy}{dx} + apx^{p-1} = 0.$$

En éliminant a entre cette équation et celle $y^n = ax^p$, on obtiendra

$$(5) \quad m \left(nx + py \frac{dy}{dx} \right) - nx \frac{dy}{dx} + py = 0$$

ou

$$(mpy - nx) \frac{dy}{dx} + mnx + py = 0,$$

équation homogène que l'on intégrera facilement.

Dans le cas particulier où $n = p = 1$, l'équation (4) devient

$$y = ax$$

et représente toutes les droites menées par l'origine de s coordonnées. L'équation (5) se réduit à celle

$$m(xdx + ydy) - ydx + xdy = 0$$

qui, étant divisée par $x^2 + y^2$, puis intégrée, donne

$$ml(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} - \text{arc tang } \frac{y}{x} = C.$$

Prenant les coordonnées polaires, ou a

$$mlr = 0 + C;$$

d'où

$$r = e^{\frac{\theta + C}{m}},$$

et, en faisant $e^{\frac{C}{m}} = C$,

$$r = Ce^{\frac{\theta}{m}},$$

équation qui est celle des spirales logarithmiques. Ainsi, toutes les courbes jouissant de la propriété de couper, sous un angle constant, les droites menées par l'origine des coordonnées, sont des spirales logarithmiques ayant cette origine pour point asymptote.

164. Lorsque l'angle donné est droit, les trajectoires sont dites *orthogonales*. Dans ce cas, on a $m = a$; l'équation (3) se réduit à celle,

$$\frac{dF}{dx} dy - \frac{dF}{dy} dx = 0,$$

et l'équation différentielle du lieu résulte de l'élimination de a entre cette équation et celle donnée

$$F(x, y, a) = 0.$$

Par exemple, si l'on prend l'équation

$$y^n = ax^p,$$

on a

$$ax + py \frac{dy}{dx} = 0,$$

et celle-ci étant intégrée donne

$$ax^2 + py^2 = 0,$$

équation qui représente, suivant que n et p sont de même signe ou de signes contraires, une infinité d'ellipses ou d'hyperboles. Ces courbes sont donc les seules qui jouissent

de la propriété de couper, sous un angle droit, toutes celles comprises dans l'équation $y^n = ax^p$.

Lorsque $n = p = 1$, l'équation $y^n = ax^p$ devient

$$y = ax$$

et représente toutes les droites qui passent par l'origine. L'équation de la trajectoire se réduit à

$$x^2 + y^2 = C.$$

et représente un cercle ayant pour centre cette origine.

Soit proposé encore de trouver la trajectoire orthogonale de tous les cercles tangents en un même point O d'une droite donnée. En prenant pour origine ce point O et pour axe des y la droite donnée, l'équation de l'un des cercles tangents sera

$$y^2 - 2ax + x^2 = 0,$$

et l'on aura

$$\frac{dF}{dx} = 2x - 2a, \quad \frac{dF}{dy} = 2y;$$

en sorte que

$$2y + 2 \frac{dy}{dx} (a - x) = 0.$$

En éliminant a entre cette équation et celle donnée (1), on obtiendra l'équation différentielle du lieu où celle de la trajectoire cherchée. On aura ainsi

$$2xy dx + (y^2 - x^2) dy = 0,$$

et si l'on pose $x^2 = z$, on ramènera cette équation à la forme linéaire du premier ordre; on aura ensuite pour son intégrale

$$x^2 = y(C - y);$$

d'où l'on voit que la trajectoire orthogonale est un cercle tangent à l'axe des x , à l'origine.

PROBLÈME DE BEAUNE.

165. Ce problème est le suivant : *trouver une courbe telle que la sous-tangente soit à l'ordonnée, comme une ligne constante est à la différence de l'ordonnée à l'abscisse.*

On a pour la condition donnée

$$\frac{dy}{dx} = \frac{y-x}{a}$$

ou

$$a \frac{dy}{dx} - y = -x,$$

équation linéaire du premier ordre et du premier degré qu'il faut intégrer.

En appliquant la formule générale du n° (151), on trouve :

$$y = x + a + Ce^{\frac{x}{a}}.$$

Si l'on prend pour axe des x' la droite qui a pour équation

$$y = x + a,$$

tout en conservant la même direction pour l'axe des y , on aura

$$y' = Ce^{\frac{x}{a}}, \quad x = \frac{x'}{\sqrt{2}},$$

et, par suite,

$$y = Ce^{\frac{x'}{\sqrt{2}}},$$

équation qui est celle de la logarithmique.

CHAPITRE IV.

ÉQUATION DU PREMIER ORDRE ET D'UN DEGRÉ QUELCONQUE.

DÉFINITIONS.

166. Soit

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0,$$

une équation différentielle du premier ordre et d'un degré quelconque par rapport à $\frac{dy}{dx}$. Si cette équation peut être résolue par rapport à cette dérivée, on aura plusieurs équations du premier degré que l'on tâchera d'intégrer. Soient $f(x, y, c) = 0$, $f_1(x, y, c_1) = 0$, $f_2(x, y, c_2) = 0$, ces diverses intégrales qui sont complétées chacune par une constante arbitraire. Le produit

$$f(x, y, c) f_1(x, y, c_1) f_2(x, y, c_2) \dots = 0$$

de toutes ces intégrales renfermera les solutions de la proposée, et en sera, par conséquent, l'intégrale générale.

Or, comme on peut, sans diminuer en rien la généralité de cette intégrale, admettre que ce soit la même constante qui entre dans tous les facteurs, on voit que toute équation différentielle du premier ordre et d'un degré quelconque m par rapport à $\frac{dy}{dx}$, aura pour intégrale une équation où la constante c sera élevée à la puissance m .

EXEMPLE. L'équation différentielle du premier ordre et du troisième degré

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^3 - (xy + x^3 + y^3) \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + (x^3y + y^3x + x^3y^3) \frac{dy}{dx} - x^3y^3 = 0$$

étant résolue par rapport à $\frac{dy}{dx}$, donne les trois équations suivantes du premier degré :

$$\frac{dy}{dx} = xy, \quad \frac{dy}{dx} = x^3, \quad \frac{dy}{dx} = y^3;$$

d'où

$$\frac{dx}{y} = x dx, \quad dy = x^3 dx, \quad \frac{dy}{y^3} = dx,$$

et l'on a, pour les intégrales de ces équations,

$$y = e^{\frac{x^2}{2} + c}, \quad y = \frac{x^3}{3} + c_1, \quad y = -\frac{1}{x + c_2}.$$

On a donc, pour l'intégrale générale de l'équation proposée,

$$\left(y - e^{\frac{x^2}{2} + c}\right) \left(y - \frac{x^3}{3} - c_1\right) \left(y + \frac{1}{x + c_2}\right) = 0.$$

CAS OU L'ÉQUATION NE CONTIENT AUCUNE DES VARIABLES.

167. Supposons que l'équation différentielle proposée ne renferme ni x , ni y , c'est-à-dire soit de la forme

$$F\left(\frac{dy}{dx}\right) = 0.$$

S'il est possible de la résoudre par rapport à $\frac{dy}{dx}$, on aura plusieurs valeurs de ce coefficient

$$\frac{dy}{dx} = a, \quad \frac{dy}{dx} = a', \quad \frac{dy}{dx} = a'' \dots$$

d'où résultent

$$y = ax + c, \quad y = a'x + c_1, \quad y = a''x + c_2 \dots$$

solutions qui seront renfermées dans l'équation suivante :

$$(y - ax + c)(y - a'x + c_1)(y - a''x + c_2) \dots = 0,$$

ou, en admettant que ce soit la même constante arbitraire qui entre dans tous les facteurs,

$$\left(\frac{y-c}{x} - a\right) \left(\frac{y-c}{x} - a'\right) \left(\frac{y-c}{x} - a''\right) \dots = 0,$$

ou bien encore

$$F\left(\frac{y-c}{x}\right) = 0.$$

Soit, par exemple, l'équation différentielle du premier ordre et du second degré

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - a^2 = 0.$$

On en déduit

$$\frac{dy}{dx} = \pm a,$$

et l'on a

$$y = ax + c, \quad y = -ax + c';$$

en sorte que l'intégrale générale est

$$(y - ax + c)(y + ax - c') = 0,$$

ou, en admettant que ce soit la même constante c qui entre dans ces deux facteurs,

$$(y - ax + c)(y + ax - c) = 0,$$

c'est-à-dire

$$(y - c)^2 - a^2 x^2 = 0.$$

CAS OU LA FONCTION NE RENFERME QUE L'UNE DES DEUX VARIABLES.

168. Soit l'équation de la forme

$$F\left(\frac{dy}{dx}, x\right) = 0$$

qui ne renferme pas y . Si cette équation peut être résolue par rapport à $\frac{dy}{dx}$, on aura

$$\frac{dy}{dx} = \varphi'(x),$$

d'où

$$y = \int \varphi'(x) dx,$$

et le problème sera ainsi ramené à une simple quadrature.

Par exemple, l'équation différentielle du second degré

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - ax = 0$$

donne

$$\frac{dy}{dx} = +\sqrt{ax}, \quad \frac{dy}{dx} = -\sqrt{ax},$$

et l'on a, en intégrant,

$$y = +\frac{2}{3}x\sqrt{ax} + c, \quad y = -\frac{2}{3}x\sqrt{ax} + c,$$

d'où

$$(y - c)^2 - \frac{4}{9}ax^3 = 0.$$

CAS OU L'ÉQUATION PEUT ÊTRE RÉSOLUE PAR RAPPORT A L'UNE QUELCONQUE DES VARIABLES.

169. Supposons maintenant que l'équation -différentielle renfermant x , y et $\frac{dy}{dx}$, et ne pouvant être résolue par rapport à $\frac{dy}{dx}$, puisse l'être par rapport à l'une quelconque des variables, à celle y par exemple, en sorte que

$$y = F(x, p),$$

p désignant le coefficient différentiel $\frac{dy}{dx}$.

En différentiant cette équation, on aura

$$dy = p dx = \frac{dF}{dx} dx + \frac{dF}{dp} dp;$$

et si l'on parvient à intégrer cette équation qui est du premier ordre et du premier degré, en éliminant p entre l'équation intégrale ainsi obtenue et la proposée $y = F(x, p)$, on obtiendra l'intégrale générale cherchée.

Lorsque l'équation a la forme

$$(1) \quad y = xF(p) + \varphi(p),$$

en la différentiant, on trouve

$$p dx = xF'(p) dp + F(p) dx + \varphi'(p) dp,$$

ou

$$\frac{dx}{dp} + \frac{F'(p)}{F(p) - p} x = - \frac{\varphi'(p)}{F(p) - p},$$

équation du premier ordre et du premier degré par rapport à x , et qui, étant intégrée n° (151), donne

$$(2) \quad x = -e^{-\int \frac{F'(p)dp}{F(p)-p}} \left[\int \left(\frac{\varphi'(p)}{F(p)-p} \right) e^{\int \frac{F'(p)dp}{F(p)-p}} dp + C \right].$$

L'intégrale générale cherchée résultera donc de l'élimination de p entre cette dernière équation et la proposée.

170. Dans le cas particulier où $F(p) = p$, l'équation (1) se réduit à celle

$$(a) \quad y = px + \varphi(p),$$

et l'on a, en différenciant,

$$dy = p dx + x dp + \varphi'(p) dp,$$

équation qui devient

$$[(x + \varphi'(p))] dp = 0,$$

et à laquelle on peut satisfaire de deux manières :

1° En posant

$$dp = 0,$$

d'où $p = c$; ce qui donne pour l'intégrale générale, en éliminant p ,

$$(b) \quad y = cx + \varphi(c).$$

2° En posant

$$x + \varphi'(p) = 0,$$

et éliminant p entre cette équation et la proposée (a); ce qui donne une équation entre x et y , sans constante arbitraire, qui ne peut se déduire de l'intégrale générale (b) en attribuant à la constante c une valeur particulière, et qui est ce qu'on nomme une *solution singulière*.

EXEMPLE. Soit l'équation

$$y dx - x dy = n \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$y = px + n \sqrt{1 + p^2}.$$

On a

$$dy = p dx + x dp + \frac{np dp}{\sqrt{1+p^2}},$$

ou

$$x dp + \frac{np dp}{\sqrt{1+p^2}} = 0.$$

Or, si l'on pose

$$dp = 0,$$

on aura $p = c$, et, par suite,

$$y = cx + n \sqrt{1+c^2}.$$

C'est l'intégrale générale.

Si l'on pose

$$x + \frac{np}{\sqrt{1+p^2}} = 0,$$

d'où

$$p = \pm \frac{x}{\sqrt{n^2 - x^2}}, \quad \sqrt{1+p^2} = -\frac{np}{x} = \mp \frac{n}{\sqrt{n^2 - x^2}},$$

on aura

$$y^2 + x^2 = n^2,$$

équation entre x et y qui satisfait également à la proposée sans renfermer de constante arbitraire, et qui, par conséquent, n'est pas comprise dans l'intégrale générale lorsqu'on donne à la constante une valeur particulière. C'est ce que nous avons nommé la solution singulière. Nous allons, dans le chapitre suivant, nous occuper de ce genre de solution.

CHAPITRE V.

SOLUTIONS SINGULIÈRES DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DU PREMIER ORDRE.

SOLUTIONS SINGULIÈRES DÉDUITES DE L'INTÉGRALE GÉNÉRALE.

171. Soit

$$(1) \quad Mdx + Ndy = 0$$

une équation différentielle du premier ordre entre deux variables x et y , et

$$(2) \quad F(x, y, c) = 0$$

son intégrale générale.

Représentons par

$$(3) \quad \varphi(x, y) = 0$$

une équation satisfaisant à l'équation (1), sans néanmoins pouvoir se déduire de l'intégrale générale (2) en attribuant à la constante c une valeur particulière, et qui est ce que nous avons nommé une *solution singulière*. On peut faire rentrer cette équation $\varphi(x, y) = 0$ dans celle $F(x, y, c) = 0$, en y remplaçant c par une fonction convenablement choisie; car il suffit d'égaliser l'une à l'autre ces deux équations pour en déduire c en fonction de x et de y .

Supposons donc que dans l'équation $F(x, y, c) = 0$, c soit déterminé, et différencions cette équation par rapport à x ; on aura

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} \frac{dy}{dx} + \frac{dF}{dc} \frac{dc}{dx} = 0,$$

d'où

$$(4) \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}} - \frac{\frac{dF}{dc}}{\frac{dF}{dy}} \frac{dc}{dx}.$$

Mais l'équation (1) résulte de l'élimination de c constant entre l'équation $F(x, y, c) = 0$ et sa dérivée immédiate

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} \frac{dy}{dx} \quad \text{ou} \quad \frac{dy}{dx} = -\frac{\frac{dF}{dx}}{\frac{dF}{dy}},$$

et cela lors même que c serait une fonction de x et de y . Donc, pour que la même équation (1) résulte pareillement de l'élimination de c variable, et fonction de x et de y , entre l'équation $F(x, y, c) = 0$ et sa dérivée immédiate (4) que nous venons d'obtenir, il faut que c soit telle que le dernier terme de cette équation se réduise à zéro, ou que l'on ait

$$\frac{\frac{dF}{dc}}{\frac{dF}{dy}} \frac{dc}{dx} = 0;$$

et à cette équation on doit adjoindre celle $F(x, y, c) = 0$.

Ce système d'équations se partage dans les trois suivants :

$$(1) \quad \frac{dc}{dx} = 0, \quad F(x, y, c) = 0,$$

$$(2) \quad \frac{dF}{dc} = 0, \quad F(x, y, c) = 0,$$

$$(3) \quad \frac{dF}{dy} = \infty, \quad F(x, y, c) = 0.$$

Le premier (1) donne $c = \text{constante}$; et cette valeur substituée dans $F(x, y, c) = 0$ redonne l'intégrale générale, en

sorte que ce système n'offre rien de remarquable. Mais si on élimine c , au moyen des deux derniers systèmes (2) et (3), on obtiendra pour c une fonction de x et de y , et cette fonction substituée dans $F(x, y, c) = 0$ conduira à une équation sans constante arbitraire, laquelle satisfera à l'équation différentielle proposée, et en sera, par conséquent, la solution singulière. Donc, *l'intégrale générale d'une équation différentielle étant connue, on obtiendra toutes les solutions singulières que cette équation comporte, en éliminant la constante c entre l'équation intégrale et sa dérivée prise par rapport à la constante et égale à zéro, ou bien encore entre cette même intégrale et sa dérivée par rapport à y égale à l'infini.*

SIGNIFICATION GÉOMÉTRIQUE DE L'INTÉGRALE SINGULIÈRE.

172. L'intégrale singulière d'une équation différentielle du premier ordre représente l'enveloppe des courbes comprises dans l'intégrale générale

$$F(x, y, c) = 0.$$

Car puisque dans cette intégrale la constante c est arbitraire, il s'ensuit que l'on peut considérer cette équation comme celle d'une infinité de courbes dont le paramètre c est différent; or nous avons vu que l'enveloppe à ces courbes s'obtenait en éliminant c entre l'équation $F(x, y, c) = 0$ et sa dérivée par rapport à c . Ce calcul est donc le même que celui qui donne la solution singulière, et l'on en conclut que l'intégrale singulière n'est autre chose que l'enveloppe des courbes représentées par l'intégrale générale $F(x, y, c) = 0$, ou l'enveloppe des intégrales particulières, puisque, comme nous l'avons dit, chacune de ces courbes représente une intégrale particulière.

PROPRIÉTÉ DONT JOUISENT LES SOLUTIONS SINGULIÈRES
DE RENDRE INFINI LE FACTEUR INTÉGRANT v .

173. Les solutions singulières jouissent de la propriété fort remarquable de rendre infini le facteur par lequel il faut multiplier le premier membre de l'équation $Mdx + Ndy = 0$, pour le rendre une différentielle exacte.

En effet, soient

$$(1) \quad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}\right) = 0$$

une équation différentielle du premier ordre, et

$$(2) \quad f(x, y, c) = 0$$

son intégrale, c étant la constante qui, éliminée en cette équation et sa dérivée immédiate

$$(3) \quad \frac{df}{dx} + \frac{dy}{dx} \frac{df}{dy} = 0,$$

conduit à l'équation différentielle proposée (1).

Différentions l'équation intégrale (2) par rapport à toutes les lettres; nous aurons

$$\frac{df}{dx} + \frac{dy}{dx} \frac{df}{dy} + \frac{dc}{dx} \frac{df}{dc} = 0,$$

ou

$$\frac{dc}{dx} = - \frac{\frac{df}{dx} + \frac{dy}{dx} \frac{df}{dy}}{\frac{df}{dc}},$$

c'est-à-dire

$$\frac{dc}{dx} = \frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dc}} \left[\frac{dy}{dx} + \frac{\frac{df}{dx}}{\frac{df}{dy}} \right].$$

Maintenant, si dans le facteur entre parenthèses, on remplace c par sa valeur tirée de l'équation (2), on aura un résultat qui sera identique avec l'équation (1); car ce facteur n'étant autre chose que l'équation (3), la substitution de c tirée de (2), donne le même résultat que si on éliminait cette constante c entre les équations (2) et (3); et nous avons vu que cette élimination conduisait à l'équation différentielle proposée (1). En remplaçant ce facteur par l'équation identique $\frac{dy}{dx} + F(x,y) = 0$, on aura donc

$$\frac{dc}{dx} = - \frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dc}} \left[\frac{dy}{dx} + F(x,y) \right].$$

Or, le premier membre étant une différentielle exacte, il faut qu'il en soit de même du second qui lui est identique.

Ainsi $\frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dc}}$ est le facteur intégrant. Mais dans le cas où il existe une solution singulière, on a

$$\frac{df}{dc} = 0, \quad \frac{dy}{dx} + F(x,y) = 0.$$

Donc, dans ce cas

$$\frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dc}} = \frac{1}{0} = \infty;$$

ce qui démontre la propriété énoncée.

Il en serait de même si l'on prenait pour ce facteur

$$\psi(v) \frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dc}};$$

car la solution singulière ne donnant pas $\psi(u) = 0$, on aurait toujours

$$\psi(u) \frac{\frac{df}{dy}}{\frac{df}{dc}} = \frac{1}{0} = \infty.$$

174. La démonstration qui précède est due à Lagrange. Voici celle qu'a donnée Laplace de la même propriété et qui est remarquable par sa simplicité.

Soient

$$(1) \quad Mdx + Ndy = 0$$

une équation différentielle du premier ordre, et

$$(2) \quad v(Mdx + Ndy) = du$$

la différentielle de son premier membre, différentielle qui est rendue exacte par la multiplication du facteur intégrant v . Mettons l'intégrale générale de l'équation (1) sous la forme

$$u = c.$$

Comme la solution singulière ne satisfait pas à cette équation, elle ne pourra donner

$$du = 0,$$

et, par conséquent, elle ne pourra rendre égal à zéro le second membre de l'équation (2). Mais elle rend nulle $Mdx + Ndy$. Donc, il faut que l'on ait

$$v = \frac{1}{0} = \infty,$$

ce qui est la propriété énoncée.

Par exemple, l'équation différentielle

$$xdx + ydy = dy \sqrt{x^2 + y^2 - a^2}$$

devient une différentielle exacte quand on la multiplie par le facteur

$$v = \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}};$$

et l'on voit que la solution singulière de cette équation ou $x^2 + y^2 - a^2 = 0$ rend bien ce facteur v infini.

EXEMPLES DE SOLUTIONS SINGULIÈRES.

175. Nous allons appliquer maintenant ce qui précède à la résolution de quelques problèmes géométriques.

1. *Trouver une courbe telle que le produit des perpendiculaires abaissées de deux points fixes sur une de ses tangentes, soit constant.*

Désignons par b^2 ce produit et par xc la droite qui joint les deux points fixes donnés. Prenons cette ligne pour axe des x , et pour axe des y une perpendiculaire élevée par son milieu. L'équation de la tangente étant

$$y' - y = p(x' - x),$$

on aura pour l'expression des deux perpendiculaires abaissées des deux points fixes sur la tangente

$$\frac{y - px + pc}{(1 + p^2)^{\frac{1}{2}}}, \quad \frac{y - px - pc}{(1 + p^2)^{\frac{1}{2}}},$$

et, par suite, pour l'équation du problème,

$$\frac{(y - px)^2 - p^2 c^2}{1 + p^2} = b^2.$$

On tire de là

$$(y - px)^2 = b^2 + (b^2 + c^2)p^2,$$

puis

$$(1) \quad y = px + \sqrt{(c^2 + b^2)p^2 + b^2},$$

équation qui est de la forme $y = px + f(p)$ examinée précédemment.

En différentiant cette équation, on trouve

$$(2) \quad dp \left[x + \frac{p(c^2 + b^2)}{\sqrt{(c^2 + b^2)p^2 + b^2}} \right] = 0;$$

Posant $dp = 0$, d'où $p = m$, m étant une constante, on a

$$(3) \quad y = mx + \sqrt{(c^2 + b^2)m^2 + b^2};$$

c'est l'intégrale générale. Cette intégrale représente une infinité de droites.

En posant

$$(4) \quad x + \frac{p(c^2 + b^2)}{\sqrt{(c^2 + b^2)p^2 + b^2}} = 0,$$

on satisfait encore à l'équation (2); et en éliminant p entre les équations (1) et (4), on obtient pour la solution singulière

$$(5) \quad (c^2 + b^2)y^2 + b^2x^2 = (c^2 + b^2)b^2.$$

Cette équation est celle d'une ellipse. Toutes les droites représentées par l'intégrale générale (3) sont donc tangentes à cette ellipse.

II. *Trouver une courbe telle que la portion de la tangente comprise entre les deux axes soit égale à une longueur constante a.*

On aura ici

$$(y - px)^2 (1 + p^2) = a^2 p^2,$$

d'où

$$(1) \quad y = px + \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}},$$

et en différentiant

$$d\rho \left[x + \frac{a}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} \right] = 0.$$

En posant $d\rho = 0$, d'où $p = c$, on obtiendra l'intégrale générale

$$(2) \quad y = cx + \frac{ac}{\sqrt{1+c^2}};$$

cette intégrale représente donc une infinité de droites.

Pour la solution singulière, on aura ensuite

$$x = -\frac{a}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

et cette valeur substituée dans l'équation (1), donnera

$$y = -\frac{ap}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{ap}{(1+p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

d'où éliminant p :

$$x^{\frac{2}{3}} + y^{\frac{2}{3}} = a^{\frac{2}{3}}.$$

Il est aisé de démontrer que la courbe représentée par cette équation n'est autre que l'épicycloïde engendrée par un point d'un cercle roulant dans un autre cercle de rayon quadruple. En effet, soit O'BM, fig. (18), la position quelconque du cercle générateur. Le point M qui à l'origine du mouvement se trouvait placé en A, appartiendra évidemment à la courbe dont il s'agit, et cette courbe, en ce point, aura pour normale O'M et pour tangente MI. Or, l'angle TIB, dans le cercle générateur, ayant pour mesure $\frac{1}{2}$ arc BM, ou $\frac{1}{2}$ arc BA, aura, dans le cercle de rayon quadruple, 2BA pour mesure. Il en résulte que l'angle TIB est double de celui AOB, c'est-à-dire que le triangle TIO est isocèle. Donc TI = IO ; OI = IH, et, par conséquent, TH = 2OI = OB. Donc enfin, la tangente TH com-

prise entre deux axes est une grandeur constante ; ce qu'il fallait démontrer.

III. Voici encore quelques exemples que nous proposerons comme exercices :

$$1^{\circ} \quad y^2 + y^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = a^2.$$

On trouve pour l'intégrale générale

$$(1) \quad (x - c)^2 + y^2 = a^2,$$

et pour la solution singulière :

$$(2) \quad y^2 = a^2.$$

Donc, toutes les droites représentées par cette solution sont tangentes aux circonférences représentées par l'intégrale générale (1).

$$2^{\circ} \quad y^2 - 2xy \frac{dy}{dx} + (1 + x^2) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 1.$$

Solution singulière :

$$y^2 = 1 + x^2.$$

$$3^{\circ} \quad y + (y - x) \frac{dy}{dx} + (u - x) \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = 0.$$

Solution singulière :

$$(x + y)^2 - 4ay = 0.$$

CHAPITRE VI.

INTÉGRATION DE QUELQUES ÉQUATIONS SIMPLES D'UN ORDRE SUPÉRIEUR.

INTÉGRATION DE L'ÉQUATION $\frac{d^m y}{dx^m} = F(x)$.

176. Proposons-nous d'intégrer l'équation

$$(1) \quad \frac{d^m y}{dx^m} = F(x)$$

dans laquelle F désigne une fonction quelconque de x . En multipliant successivement cette équation par dx et intégrant, on aura

$$\frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} = \int F(x) dx + c,$$

$$\frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} = \int dx \int F(x) dx + cx + c';$$

et, ainsi de suite. Après m intégrations effectuées par rapport à x , on aura donc

$$(2) \quad y = \int dx \int dx \dots \int F(x) dx + cx^{m-1} + c'x^{m-2} + \dots + c^{(m-1)}.$$

177. On peut exprimer l'intégrale multiple qui figure dans cette expression par une suite d'intégrales simples. En effet, en intégrant par parties, on trouve

$$\int \int F(x) dx^2 = x \int F(x) dx - \int x F(x) dx,$$

$$\int \int \int F(x) dx^3 = \frac{1}{1.2} \left[x^2 \int F(x) dx - 2x \int x F(x) dx + \int x^2 F(x) dx \right];$$

et ainsi de suite. De là on conclut par induction

$$(3) \quad \int \int \int \dots F(x) dx^m =$$

$$\frac{1}{1.2\dots(m-1)} \left[x^{m-1} \int F(x) dx - \frac{m-1}{1} x^{m-2} \int x F(x) dx \right. \\ \left. + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} x^{m-3} \int x^2 F(x) dx \dots \pm \int x^{m-1} F(x) dx \right].$$

178. Pour démontrer la généralité de cette formule, il suffit de faire voir que si elle a lieu pour l'indice n , elle a encore lieu pour l'indice $n+1$. Or, si l'on met cette équation sous la forme

$$\int \int \int \dots F(x) dx^m =$$

$$\frac{1}{1.2\dots m} \left[mx^{m-1} \int F(x) dx - m(m-1)x^{m-2} \int x F(x) dx \right. \\ \left. + \frac{m(m-1)(m-2)}{1.2} x^{m-3} \int x^2 F(x) dx \dots \pm m \int x^{m-1} F(x) dx \right],$$

et que l'on multiplie les deux membres de cette dernière par dx , puis que l'on intègre par parties, on trouvera

$$\int \int \int \dots F(x) dx^{m+1} =$$

$$\frac{1}{1.2\dots m} \left[x^m \int F(x) dx - mx^{m-1} \int x F(x) dx \right. \\ \left. + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} \int x^2 F(x) dx \dots \pm mx \int x^{m-1} F(x) dx \right. \\ \left. - \frac{1}{1.2\dots m} \left[1 - m + \frac{m(m-1)}{1.2} \dots \pm m \right] \int x^m F(x) dx \right];$$

et comme la quantité entre parenthèses, dans la dernière intégrale, a pour valeur $(1-1)^n \pm 1$ ou ± 1 , puisque $(1-1)^n = 0$, on en conclut

$$\int \int \int \dots F(x) dx^{m+1} = \frac{1}{1.2\dots m} \left[x^m \int F(x) dx - m x^{m-1} \int x F(x) dx + \frac{m(m-1)}{1.2} x^{m-2} \int x^2 F(x) dx \dots \mp \int x^m F(x) dx \right];$$

équation qui est bien celle (3), si l'on change, dans cette dernière, m en $m+1$.

179. On peut encore exprimer la même intégrale multiple au moyen d'une intégrale simple. En effet, en prenant dans l'expression (2) les intégrales entre les limites x_0 et x , et remplaçant dans le second membre de cette expression x par z , on a

$$\int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \dots F(x) dx^m = \frac{1}{1.2\dots(m-1)} \left[x^{m-1} \int_{x_0}^x F(z) dz - \frac{m-1}{1} x^{m-2} \int_{x_0}^x z F(z) dz + \frac{(m-1)(m-2)}{1.2} x^{m-3} \int_{x_0}^x z^2 F(z) dz - \dots \right];$$

par suite

$$(4) \quad \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \int_{x_0}^x \dots F(x) dx^m = \frac{1}{1.2\dots(m-1)} \int_{x_0}^x F(z) (x-z)^{m-1} dz.$$

180. En remplaçant dans cette dernière formule $F(x)$ par $F^{n+1}(x)$, et n par $n+1$, on a

$$\int_{x_0}^x F(x) dx^{n+1} = \frac{1}{1.2\dots n} \int_{x_0}^x F^{n+1}(z) (x-z)^n dz.$$

Mais

$$\int_{x_0}^x F^{n+1}(x) dx^{n+1} = F(x) - F(x_0) - F'(x_0)(x-x_0) - \frac{F''(x_0)}{1.2} \frac{(x-x_0)^2}{2} \dots - \frac{F^n(x_0)}{1.2\dots n} \frac{(x-x_0)^n}{n},$$

Donc

$$F(x) = F(x_0) + F'(x_0)(x - x_0) + F''(x_0) \frac{(x - x_0)^2}{1.2} + \dots \\ + F^{(n)}(x_0) \frac{(x - x_0)^n}{1.2 \dots n} + \frac{1}{1.2 \dots n} \int_{x_0}^x F^{(n+1)}(z) (x - z)^n dz,$$

ou en posant $x = x_0 + h$ et $z = x_0 + h - t$

$$F(x_0 + h) = F(x_0) + hF'(x_0) + \frac{h^2}{1.2} F''(x_0) + \dots \\ + \frac{h^n}{1.2 \dots n} F^{(n)}(x_0) + \frac{1}{1.2 \dots n} \int_0^h F^{(n+1)}(x_0 + h - t) t^n dt.$$

On est ainsi conduit à une nouvelle démonstration de la série de Taylor.

ÉQUATIONS OU RENTRENT SEULEMENT DEUX DÉRIVÉES D'ORDRE QUELCONQUE.

181. Considérons d'abord le cas où l'équation est de la forme

$$(1) \quad F\left(\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}, \frac{d^ny}{dx^n}\right) = 0,$$

c'est-à-dire renferme deux dérivées consécutives d'un ordre quelconque.

Posons

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = p; \quad \text{d'où} \quad \frac{d^ny}{dx^n} = \frac{dp}{dx}.$$

Par cette valeur, l'équation proposée deviendra

$$F\left(p, \frac{dp}{dx}\right) = 0,$$

d'où

$$\frac{dp}{dx} = f(p), \quad dx = \frac{dp}{f(p)},$$

et, en intégrant, on aura

$$(2) \quad x = \int \frac{dp}{f(p)} + c.$$

Maintenant, si l'on peut résoudre cette équation par rapport à p , on aura

$$\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = p = \varphi(x);$$

et par une suite de quadratures, on parviendra à exprimer y en fonction de x et de m constantes arbitraires, comme on l'a fait n° (176).

Si cette équation ne peut pas être résolue par rapport à p , alors

$$\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = p,$$

d'où

$$d \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = p dx = \frac{p dp}{f(p)},$$

et en intégrant

$$\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = \int p dx = \int \frac{p dp}{f(p)} + c'.$$

Multipliant par $dx = \frac{dp}{f(p)}$, et intégrant de nouveau, on aura

$$\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} = \int \frac{dp}{f(p)} \int \frac{p dp}{f(p)} + c'x + c'';$$

et, ainsi de suite. Par une suite de quadratures, on parviendra donc à une certaine équation $y = \psi(x)$; et en éliminant p , entre cette équation et celle (2), on obtiendra une équation entre x, y et m constantes arbitraires; et cette équation sera l'intégrale générale de la proposée.

EXEMPLE. — Trouver la courbe dont le rayon de courbure est égal à une constante a . On a ici

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = a,$$

ou en posant $\frac{dy}{dx} = p$; $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$,

$$\frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dp}{dx}} = a.$$

Ainsi

$$dx = \frac{a dp}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}$$

et

$$(1) \quad x = \frac{ap}{\sqrt{1 + p^2}} + c.$$

On a ensuite

$$dy = p dx = \frac{ap dp}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}},$$

d'où

$$(2) \quad y = \int p dx = -\frac{a}{\sqrt{1 + p^2}} + c'.$$

Éliminant p entre les deux intégrales premières (1) et (2), on obtiendra enfin pour l'intégrale générale

$$(x - c)^2 + (y - c')^2 = a^2,$$

équation qui est celle d'un cercle de rayon a .

On peut aussi résoudre l'équation (1) par rapport à p , ce qui donne

$$p = \frac{x - c}{\sqrt{a^2 - (x - c)^2}},$$

ou

$$dy = \frac{(x - c) dx}{\sqrt{a^2 - (x - c)^2}},$$

et, en intégrant,

$$y - c' = -\sqrt{a^2 - (x - c')^2},$$

c'est-à-dire

$$(x - c')^2 + (y - c')^2 = a^2.$$

182. Considérons maintenant le cas où les deux dérivées qui rentrent dans l'équation proposée ont leur ordre différent de deux unités; et soit

$$(1) \quad F\left(\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}}, \frac{d^m y}{dx^m}\right) = 0.$$

En posant $\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} = p$, il viendra

$$F\left(p, \frac{d^2 p}{dx^2}\right) = 0, \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2 p}{dx^2} = f(p).$$

Multipliant les deux membres par $2dp$ et intégrant, on aura

$$\left(\frac{dp}{dx}\right)^2 = 2 \int f(p) dp + c,$$

d'où l'on tire

$$\frac{dp}{dx} = \sqrt{2 \int f(p) dp + c} = \psi(p),$$

et, par suite,

$$(2) \quad x = \int \frac{dp}{\psi(p)} + c'.$$

Si cette équation peut être résolue par rapport à p , on obtiendra l'intégrale générale y au moyen de $m-2$ quadratures qui introduiront un pareil nombre de nouvelles constantes arbitraires. Mais si cette équation ne peut pas être résolue par rapport à p , alors il faudra opérer comme il suit :

On intégrera $m-2$ fois l'équation $\frac{d^{m-2}y}{dx^{m-2}} = p$, après avoir multiplié chaque fois par $dx = \frac{dp}{f(p)}$, et l'on obtiendra de cette manière l'expression de y en fonction de p ou $y = F(p)$, expression qui contiendra ainsi $m-2$ constantes arbitraires.

En éliminant ensuite p , entre cette équation et celle (2), on aura une équation entre x, y et m constantes arbitraires, et cette équation sera l'intégrale générale de la proposée.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS QUE L'ON PEUT ABAISSER A UN ORDRE INFÉRIEUR.

183. Soit l'équation d'ordre m :

$$F\left(x, \frac{d^n y}{dx^n}, \frac{d^{n+1} y}{dx^{n+1}}, \dots \frac{d^m y}{dx^m}\right) = 0.$$

On peut abaisser de n unités l'ordre de cette équation. Il suffit, en effet, pour cela, de poser $\frac{d^n y}{dx^n} = p$, ce qui donne

$$F\left(x, p, \frac{dp}{dx}, \dots \frac{d^{m-n} p}{dx^{m-n}}\right) = 0,$$

équation qui n'est plus que de l'ordre $m - n$; et si l'on peut intégrer cette équation, puis la résoudre par rapport à x ou à p , on obtiendra l'intégrale générale par les mêmes moyens que dans le cas qui précède.

184. Soit encore l'équation

$$F\left(y, \frac{dy}{dx}, \dots \frac{d^m y}{dx^m}\right) = 0$$

qui ne renferme pas x . Par le changement de la variable indépendante, on réduira cette équation à celle

$$F\left(y, \frac{dx}{dy}, \frac{d^2 x}{dy^2}, \dots \frac{d^m x}{dy^m}\right) = 0,$$

et en posant $\frac{dx}{dy} = p$, on abaissera cette dernière à un ordre inférieur.

185. On peut encore poser, dans ce cas, $\frac{dy}{dx} = p$; d'où

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = p \frac{dp}{dy},$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{d\left(p \frac{dp}{dy}\right)}{dx} = p \frac{d\left(p \frac{dp}{dy}\right)}{dy} = p^2 \frac{d^2p}{dy^2} + p \frac{dp^2}{dy^2},$$

ce qui donne, en substituant dans la proposée,

$$\psi\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \frac{d^2p}{dy^2}\right) = 0,$$

équation qui n'est plus que l'ordre $m-1$.

186. Lorsque l'équation

$$(1) \quad F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^m y}{dx^m}\right) = 0$$

est homogène par rapport à $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots$, on peut abaisser son ordre d'une unité. Il suffit, pour cela, de mettre cette équation sous la forme

$$(2) \quad f\left(x, \frac{dy}{dx}, \frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\frac{dy}{dx}}, \dots, \frac{\frac{d^m y}{dx^m}}{\frac{dy}{dx}}\right) = 0;$$

car alors en posant $\frac{dy}{dx} = yu$; d'où $y = e^{\int u dx}$, on a

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= e^{\int u dx} u, \\ \frac{d^2y}{dx^2} &= e^{\int u dx} \left(\frac{du}{dx} + u^2\right), \\ \frac{d^3y}{dx^3} &= e^{\int u dx} \left(\frac{d^2u}{dx^2} + 3u \frac{du}{dx} + u^3\right), \\ &\dots \end{aligned}$$

valeurs qui, substituées dans l'équation (2), la réduisent à une autre d'ordre $m - 1$ entre x et u .

187. Proposons-nous, comme application, de déterminer la courbe dont le rayon de courbure est en raison inverse de l'abscisse.

L'équation différentielle qu'il s'agit d'intégrer est la suivante :

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \frac{a^2}{2x};$$

et en posant $\frac{dy}{dx} = p$, d'où $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx}$, on réduira cette équation à celle

$$\frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{\frac{dp}{dx}} = \frac{a^2}{2x};$$

d'où

$$2x dx = \frac{a^2 dp}{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

Intégrant on a

$$x^2 + c = \frac{a^2 p}{\sqrt{1 + p^2}};$$

et si l'on tire de là la valeur de p , savoir

$$p = \frac{x^2 + c}{\sqrt{a^4 - (x^2 - c^2)}}$$

l'équation $y = \int p dx + c'$ donnera

$$y = \int \frac{(x^2 + c) dx}{\sqrt{a^4 - (x^2 - c^2)}} + c'$$

équation qui est celle de la courbe élastique.

188. Cherchons encore la courbe dont le rayon de courbure est proportionnel à la normale.

On a

$$\frac{\left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}} = \mp my \left[1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}$$

m étant une constante ; et en posant

$$\frac{dy}{dx} = p, \quad \text{d'où} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{dp}{dx} = p \frac{dp}{dy}$$

on réduit cette équation à celle

$$\frac{(1 + p^2)^{\frac{3}{2}}}{p \frac{dp}{dy}} = \mp my (1 + p^2)^{\frac{1}{2}},$$

d'où

$$\frac{dy}{y} = \mp \frac{mp dp}{1 + p^2}.$$

Intégrant on a

$$l \frac{y}{c} = \frac{m}{2} l(1 + p^2) = \mp l(1 + p^2)^{\frac{m}{2}}, \quad \text{ou} \quad \frac{y}{c} = (1 + p^2)^{\mp \frac{m}{2}}.$$

On a donc

$$p = \sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^{\mp \frac{2}{m}} - 1} = \frac{dy}{dx},$$

et, par conséquent,

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^{\mp \frac{2}{m}} - 1}}.$$

équation différentielle binôme que l'on peut intégrer, d'après ce qui a été dit au n° (19).

189. Examinons les cas particuliers de $m = 1$ et de $m = 2$, où cette intégration est possible.

1° Soit $m = 1$, l'équation différentielle de la courbe sera

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^2 - 1}},$$

et, en prenant le signe supérieur, on aura

$$dx = \frac{y dy}{\sqrt{c^2 - y^2}},$$

d'où

$$y^2 + (x - c')^2 = c^2,$$

équation d'un cercle ayant son centre situé sur l'axe des x .

En prenant le signe inférieur, on trouvera

$$dx = \frac{cdy}{\sqrt{y^2 - c^2}},$$

d'où

$$x - c' = cl \frac{y + \sqrt{y^2 - c^2}}{c},$$

et, par suite, en remplaçant $x - c'$ par x

$$y + \sqrt{y^2 - c^2} = ce^{\frac{x}{c}}$$

ou

$$y = \frac{1}{2} c \left(e^{\frac{x}{c}} + e^{-\frac{x}{c}} \right)$$

équation qui est celle de la *chaînette*. Cette courbe jouit donc de la propriété d'avoir son rayon de courbure égal à la normale et dirigé en sens contraire.

2° Soit $m = 2$. On aura

$$dx = \frac{dy}{\sqrt{\left(\frac{y}{c}\right)^2 - 1}},$$

et en prenant le signe supérieur, il viendra

$$dx = dy \sqrt{\frac{y}{c-y}},$$

équation qui est celle d'une cycloïde dont la base est sur l'axe des x , et dont le cercle générateur a pour rayon $\frac{c}{2}$. On sait, en effet, que dans cette courbe le rayon de courbure est double de la normale.

En prenant le signe inférieur, on aura

$$dx = \frac{\sqrt{c} dy}{\sqrt{y-c}};$$

d'où

$$x - c' = 2\sqrt{c}(y - c)^{\frac{1}{2}},$$

et

$$4c(y - c) = (x - c')^2,$$

équation d'une parabole dont l'axe est perpendiculaire à celui des x .

CHAPITRE VII.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES D'UN ORDRE QUELCONQUE.

PROPRIÉTÉ DES ÉQUATIONS LINÉAIRES SANS SECOND MEMBRE.

190. On appelle *équations linéaires* celles dans lesquelles la fonction cherchée y et ses dérivées n'entrent qu'à la première puissance, et sans se multiplier entre elles.

Ces équations sont généralement de la forme :

$$(1) \quad \frac{d^m y}{dx^m} + P \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + Q \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + T \frac{dy}{dx} + Uy = V,$$

$P, Q, \dots T, U, V$ étant des fonctions quelconques de la variable indépendante x .

Lorsque le second membre V manque, ces équations jouissent d'une propriété fort remarquable, et qui consiste en ce que *si plusieurs fonctions particulières $y_1, y_2, \dots y_n$ satisfont à cette équation, la somme de ces fonctions, ainsi que celle de ces fonctions multipliées par des constantes arbitraires, y satisfera également.*

En effet, soit l'équation proposée

$$(2) \quad \frac{d^m y}{dx^m} + P \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + Q \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + T \frac{dy}{dx} + Uy = 0.$$

En mettant successivement dans cette équation, à la place

manière que pour une valeur quelconque de x , il soit possible de donner à $y, \frac{dy}{dx} \dots \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$ des valeurs tout à fait arbitraires.

INTÉGRATION DE L'ÉQUATION LINÉAIRE COMPLÈTE.

191. L'intégration de l'équation linéaire complète

$$(1) \quad \frac{d^m y}{dx^m} + P \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + Q \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + T \frac{dy}{dx} + Uy = V,$$

dans laquelle $P, Q, \dots T, U, V$ désignent toujours des fonctions quelconques de x , se réduit à l'intégration de l'équation

$$(2) \quad \frac{d^m y}{dx^m} + P \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + Q \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + P \frac{dy}{dx} + Uy = 0,$$

que nous venons d'examiner; et il suffit de connaître un nombre m de valeurs particulières satisfaisant à l'équation (2) pour en conclure l'intégrale générale de l'équation proposée(1).

Soient donc $y_1, y_2, y_3, \dots y_m$ ces m valeurs particulières satisfaisant à l'équation (2). L'expression

$$(3) \quad y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \dots + C_m y_m$$

y satisfera également, et comme cette expression renferme m constantes arbitraires, elle en sera l'intégrale générale, d'après ce qui a été dit au n° (142). Or, on peut remplacer les constantes arbitraires $C_1, C_2, \dots C_m$ que renferme l'équation (3), par des fonctions de x tellement choisies, que cette équation devienne l'intégrale générale de l'équation (1); et il s'agit alors de déterminer les fonctions $C_1, C_2, \dots C_m$ de manière que la valeur de y satisfasse à l'équation (1). Or, nous allons voir que cette détermination n'exige que de simples quadratures.

En effet, si l'on différencie l'équation (3) où $C_1, C_2, C_3, \dots, C_m$ sont regardées comme des fonctions de x , on aura

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} = & C_1 \frac{dy_1}{dx} + C_2 \frac{dy_2}{dx} + C_3 \frac{dy_3}{dx} + \dots + C_m \frac{dy_m}{dx}, \\ & + y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} + y_3 \frac{dC_3}{dx} + \dots + y_m \frac{dC_m}{dx}, \end{aligned}$$

et posant

$$y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} + y_3 \frac{dC_3}{dx} + \dots + y_m \frac{dC_m}{dx} = 0,$$

il en résultera

$$(a) \quad \frac{dy}{dx} = C_1 \frac{dy_1}{dx} + C_2 \frac{dy_2}{dx} + C_3 \frac{dy_3}{dx} + \dots + C_m \frac{dy_m}{dx},$$

comme si $C_1, C_2, C_3, \dots, C_m$ étaient constants.

En différenciant de nouveau cette équation, on trouvera

$$(b) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = C_1 \frac{d^2y_1}{dx^2} + C_2 \frac{d^2y_2}{dx^2} + C_3 \frac{d^2y_3}{dx^2} + \dots + C_m \frac{d^2y_m}{dx^2},$$

à cause que

$$\frac{dy_1}{dx} \frac{dC_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} \frac{dC_2}{dx} + \frac{dy_3}{dx} \frac{dC_3}{dx} + \dots + \frac{dy_m}{dx} \frac{dC_m}{dx} = 0.$$

On aura de même

$$(c) \quad \frac{d^3y}{dx^3} = C_1 \frac{d^3y_1}{dx^3} + C_2 \frac{d^3y_2}{dx^3} + C_3 \frac{d^3y_3}{dx^3} + \dots + C_m \frac{d^3y_m}{dx^3},$$

en posant

$$\frac{d^2y_1}{dx^2} \frac{dC_1}{dx} + \frac{d^2y_2}{dx^2} \frac{dC_2}{dx} + \frac{d^2y_3}{dx^2} \frac{dC_3}{dx} + \dots + \frac{d^2y_m}{dx^2} \frac{dC_m}{dx} = 0;$$

et, ainsi de suite jusqu'à $\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$ inclusivement. On parviendra de cette manière

$$\begin{aligned}
 C_1 &= \int X_1 dx + \alpha_1, \\
 C_2 &= \int X_2 dx + \alpha_2, \\
 &\dots\dots\dots \\
 C_m &= \int X_m dx + \alpha_m,
 \end{aligned}$$

et, par suite,

$$y = y_1 \left(\alpha_1 + \int X_1 dx \right) + y_2 \left(\alpha_2 + \int X_2 dx \right) + \dots + y_m \left(\alpha_m + \int X_m dx \right),$$

expression qui est l'intégrale générale de la proposée, puisqu'elle renferme m constantes arbitraires $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$.

Ainsi, il suffit de connaître m solutions particulières de l'équation (2), pour en déduire l'intégrale générale de l'équation (1), et ce calcul n'exige que de simples quadratures.

192. Si l'on ne connaissait pas m intégrales particulières de l'équation proposée, ce que nous venons de dire ne serait plus applicable de la même manière.

Supposons, par exemple, que l'on ne connaisse que $m-1$ intégrales particulières de l'équation (2). On ne pourra plus établir entre les $m-1$ quantités $C_1, C_2, C_3, \dots, C_{m-1}$ que $m-2$ relations arbitraires; et en substituant dans l'équation (1) les valeurs de $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^my}{dx^m}$, et réduisant les termes qui se détruisent par hypothèse, on sera conduit à une équation $\Phi = V$, dans laquelle entreront les dérivées premières et secondes de $C_1, C_2, \dots, C_{m-1}$, savoir : $\frac{dC_1}{dx}, \frac{dC_2}{dx}, \dots, \frac{dC_{m-1}}{dx}$; $\frac{d^2C_1}{dx^2}, \frac{d^2C_2}{dx^2}, \dots, \frac{d^2C_{m-1}}{dx^2}$. Les $m-2$ relations établies entre $\frac{dC_1}{dx}, \frac{dC_2}{dx}, \dots, \frac{dC_{m-2}}{dx}$ détermineront ces dérivées en fonction de $\frac{dC_1}{dx}$, et en les substituant dans $\Phi = V$, on obtiendra une équation

tion linéaire du second ordre où entreraient seulement $\frac{dC_1}{dx}$,

$\frac{d^2C_1}{dx^2}$. Cette équation sera réductible au premier ordre, en po-

sant $\frac{dC_1}{dx} = z$, et pourra toujours s'intégrer généralement

comme on l'a vu n° (151), ce qui fournira ainsi deux constantes arbitraires. Par de simples quadratures, on obtiendra ensuite les $m-2$ autres quantités $C_2, C_3, \dots, C_{m-2}$, et ce calcul fournira encore $m-2$ nouvelles constantes arbitraires. Il en résulte que l'expression

$$y = C_1 y + C_2 y_2 + \dots + C_{m-1} y_{m-1}$$

renfermera les m constantes arbitraires $C_1, C_2, \dots, C_m$ et sera, par conséquent, l'intégrale générale de l'équation proposée (1).

Si l'on ne connaissait que $m-2$ intégrales particulières de l'équation (2), on ne pourrait établir, entre les $m-2$ quantités $C_1, C_2, \dots, C_{m-2}$, que $m-3$ relations, et l'on serait alors conduit à

une équation $\Phi = V$, dans laquelle entreraient les dérivées $\frac{dC_1}{dx}$, $\frac{dC_2}{dx}$, $\frac{dC_{m-2}}{dx}$; $\frac{d^2C_1}{dx^2}$, $\frac{d^2C_2}{dx^2}$, ..., $\frac{d^2C_{m-2}}{dx^2}$; $\frac{d^3C_1}{dx^3}$, $\frac{d^3C_2}{dx^3}$, $\frac{d^3C_m}{dx^3}$.

Les $m-2$ relations établies entre $\frac{dC_1}{dx}$, $\frac{dC_2}{dx}$, ..., $\frac{dC_{m-2}}{dx}$ déter-

mineraient ces dérivées en fonction de $\frac{dC_1}{dx}$, et en les sub-

stituant dans $\Phi = V$, on aurait une équation différentielle li-

néaire du troisième ordre où C_1 n'entrerait que par ses déri-

vées $\frac{dC_1}{dx}$, $\frac{d^2C_1}{dx^2}$, $\frac{d^3C_1}{dx^3}$. On pourrait encore réduire cette équation

au second ordre, en posant $\frac{dC_1}{dx} = z$, et s'il était possible de l'intégrer complètement, on en déduirait l'intégrale générale cherchée de la même manière que dans le cas qui précède.

En généralisant ce qu'on vient de dire, il est facile d'en

conclure que si l'on connaît $m - n$ intégrales particulières de l'équation (2), on pourra ramener l'intégration de l'équation complète (1), et par suite aussi celle de l'équation (2), à l'intégration d'une équation linéaire d'ordre n .

193. *Cas particuliers.* — Dans le cas où l'on connaît une intégrale particulière de l'équation

$$(1) \quad \frac{d^m y}{dx^m} + P \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + Q \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + T \frac{dy}{dx} + Uy = V,$$

la recherche de son intégrale générale se ramène facilement à celle de l'intégrale générale de l'équation (2). En effet, soit u cette intégrale particulière. En posant $y = u + z$ dans l'équation (1), et supprimant les termes qui se détruisent par hypothèse, on trouve

$$\frac{d^m z}{dx^m} + P \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + Q \frac{d^{m-2} z}{dx^{m-2}} + \dots + T \frac{dz}{dx} + Uz = 0,$$

et la recherche de l'intégrale générale de l'équation (1) se trouve ainsi ramenée à celle de l'intégrale générale de l'équation (2).

MÉTHODE DE CAUCHY.

194. Reprenons les deux équations

$$(1) \quad \frac{d^m y}{dx^m} + P \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + Q \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + T \frac{dy}{dx} + Uy = F(x),$$

$$(2) \quad \frac{d^m z}{dx^m} + P \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + Q \frac{d^{m-2} z}{dx^{m-2}} + \dots + T \frac{dz}{dx} + Uz = 0,$$

et soit $z = \varphi(x, \alpha')$ une valeur de z satisfaisant à l'équation (2), et telle que pour $x = \alpha$, on ait :

$$z = 0, \quad \frac{dz}{dx} = 0, \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = 0, \quad \frac{d^{m-2} z}{dx^{m-2}} = 0, \quad \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} = F(\alpha).$$

POSSONS

$$y = \int_0^x \varphi(x, \alpha) d\alpha = \int_0^x z d\alpha.$$

En différentiant cette équation par rapport à x , limite supérieure de l'intégrale, on aura

$$\frac{dy}{dx} = \varphi(x, x) + \int_0^x \frac{d\varphi(x, \alpha)}{dx} d\alpha.$$

Mais par hypothèse $\varphi(\alpha, \alpha)$ est nul; donc $\varphi(x, x) = 0$, et par suite

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \frac{dz}{dx} d\alpha.$$

On trouvera de la même manière :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = \int_0^x \frac{d^2 z}{dx^2} d\alpha \dots \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} = \int_0^x \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} d\alpha,$$

$$\frac{d^m y}{dx^m} = F(x) + \int_0^x \frac{d^m z}{dx^m} d\alpha.$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (1), on obtiendra

$$\int_0^x \left(\frac{d^m z}{dx^m} + P \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + Q \frac{d^{m-2} z}{dx^{m-2}} + \dots + T \frac{dz}{dx} + Uz \right) d\alpha + F(x) = F(x),$$

ou $0 = 0$, puisque par hypothèse z vérifie l'équation (2). Donc la valeur

$$y = \int_0^x z d\alpha$$

satisfait à l'équation (1) ou en est une intégrale particulière.

En désignant par u cette intégrale particulière, et posant $y = u + v$ dans l'équation (1); puis supprimant les termes qui se détruisent, on trouve

$$\left[\frac{d^m u}{dx^m} + P \frac{d^{m-1} u}{dx^{m-1}} + Q \frac{d^{m-2} u}{dx^{m-2}} + \dots + Uu - F(x) \right] + \frac{d^m v}{dx^m} + \dots + Uv = 0.$$

Mais le facteur entre parenthèses est nul par hypothèse. Donc

$$\frac{d^m v}{dx^m} + P \frac{d^{m-1} v}{dx^{m-1}} + \dots + Uv = 0;$$

et si l'on peut intégrer généralement cette équation qui est de l'ordre m , $u + v$ sera l'intégrale générale de l'équation (1).

INTÉGRATION DE L'ÉQUATION LINÉAIRE A COEFFICIENTS CONSTANTS.

195. Proposons-nous maintenant d'intégrer l'équation

$$(1) \quad \frac{d^m y}{dx^m} + P \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + Q \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + T \frac{dy}{dx} + Uy = V,$$

dans laquelle $P, Q \dots T, U, V$, sont des coefficients constants.

En posant $y = y + \frac{V}{U}$, on ramène cette équation à celle privée de second membre

$$(2) \quad \frac{d^m y}{dx^m} + P \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + Q \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + T \frac{dy}{dx} + Uy = 0.$$

C'est donc cette dernière qu'il s'agit d'intégrer. Or, si l'on peut trouver m solutions distinctes de cette équation, c'est-à-dire m valeurs de y , y satisfaisant, on obtiendra immédiatement son intégrale générale, comme on l'a vu n° (190) en multipliant chacune des solutions obtenues par une constante arbitraire et ajoutant les résultats. Cherchons donc ces m solutions.

Posons

$$y = e^{ax},$$

a étant indéterminé. On aura en général

$$\frac{d^m y}{dx^m} = a^m e^{ax},$$

et substituant cette valeur dans l'équation (2), il viendra

$$(3) \quad a^m + Pa^{m-1} + Qa^{m-2} + \dots + Ta + U = 0.$$

Soient $a_1, a_2, a_3, \dots, a_m$, les m racines de cette équation. La proposée sera satisfaite par chacune des valeurs

$$y_1 = e^{a_1 x}, \quad y_2 = e^{a_2 x}, \quad \dots \quad y_m = e^{a_m x};$$

ce seront les m solutions cherchées, et l'on aura, en conséquence, pour l'intégrale générale

$$(4) \quad y = C_1 e^{a_1 x} + C_2 e^{a_2 x} + C_3 e^{a_3 x} + \dots + C_m e^{a_m x},$$

$C_1, C_2, C_3, \dots, C_m$, étant des constantes arbitraires.

196. Il est aisé de démontrer que l'équation (4) est bien l'intégrale générale de l'équation proposée (2). Il suffit, en effet, pour cela, de faire voir qu'on peut déterminer ces constantes $C_1, C_2, \dots, C_m$, de manière que pour une valeur particulière de x , $x = 0$, par exemple, la fonction y et ses $m-1$ premières dérivées $\frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}}$, aient des valeurs arbitraires que nous désignerons respectivement par $y_0, y'_0, y''_0, \dots, y_0^{m-1}$.

Or, en différentiant l'équation (4), on en déduit

$$\frac{dy}{dx} = C_1 a_1 e^{a_1 x} + C_2 a_2 e^{a_2 x} + \dots + C_m a_m e^{a_m x},$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = C_1 a_1^2 e^{a_1 x} + C_2 a_2^2 e^{a_2 x} + \dots + C_m a_m^2 e^{a_m x},$$

$$\dots \dots \dots$$

$$\frac{d^{m-1}y}{dx^{m-1}} = C_1 a_1^{m-1} e^{a_1 x} + C_2 a_2^{m-1} e^{a_2 x} + \dots + C_m a_m^{m-1} e^{a_m x},$$

et faisant $x = 0$ dans ces équations, on a pour déterminer $C_1, C_2, \dots, C_m$, les suivantes :

$$(5) \begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 + \dots + C_m = y_0, \\ C_1 a_1 + C_2 a_2 + C_3 a_3 + \dots + C_m a_m = y'_0, \\ C_1 a_1^2 + C_2 a_2^2 + C_3 a_3^2 + \dots + C_m a_m^2 = y''_0, \\ \vdots \\ C_1 a_1^{m-1} + C_2 a_2^{m-1} + C_3 a_3^{m-1} + \dots + C_m a_m^{m-1} = y_{(m-1)} \end{cases}$$

finies et déterminées, en sorte qu'il sera possible de satisfaire aux équations (5). Donc on peut toujours déterminer les m constantes $C_1, C_2, \dots, C_m$, de manière que pour une certaine valeur $x = 0$, la fonction y et ses $m - 1$ premières dérivées aient des valeurs données $y_0, y'_0, \dots, y_0^{(m-1)}$; ce qu'il s'agissait de prouver.

CAS DES RACINES IMAGINAIRES.

197. Lorsque l'équation (3) a des racines imaginaires, l'expression de y se présente sous une forme imaginaire. Mais rien n'est plus simple que de lui faire perdre ce caractère, et de la ramener à une forme réelle.

En effet, soit

$$a_1 = \alpha + \epsilon \sqrt{-1}, \quad a_2 = \alpha - \epsilon \sqrt{-1},$$

deux racines imaginaires conjuguées de l'équation (3). On aura, pour les deux termes correspondant à ces racines dans la valeur de y ,

$$\begin{aligned} C_1 e^{a_1 x} + C_2 e^{a_2 x} &= C_1 e^{(\alpha + \epsilon \sqrt{-1})x} + C_2 e^{(\alpha - \epsilon \sqrt{-1})x} \\ &= e^{\alpha x} (C_1 e^{\epsilon x \sqrt{-1}} + C_2 e^{-\epsilon x \sqrt{-1}}), \end{aligned}$$

ou

$$\begin{aligned} e^{\alpha x} [C_1 (\cos \epsilon x + \sqrt{-1} \sin \epsilon x) + C_2 (\cos \epsilon x - \sqrt{-1} \sin \epsilon x)] \\ = e^{\alpha x} [(C_1 + C_2) \cos \epsilon x + \sqrt{-1} (C_1 - C_2) \sin \epsilon x], \end{aligned}$$

ou bien encore en faisant $C_1 + C_2 = A$, $(C_1 - C_2) \sqrt{-1} = B$, A et B étant deux nouvelles constantes arbitraires,

$$C_1 e^{a_1 x} + C_2 e^{a_2 x} = e^{\alpha x} (A \cos \epsilon x + B \sin \epsilon x),$$

valeur qui est entièrement réelle. La même transformation s'applique aux autres couples de racines imaginaires.

On peut encore poser

$$A = N \cos n, \quad B = -N \sin n,$$

ce qui donne

$$e^{ax} (A \cos nx + B \sin nx) = Ne^{ax} \cos (nx + n),$$

N et n étant deux constantes arbitraires.

198. EXEMPLES. — 1° Soit l'équation du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} + n^2 = 0.$$

On a

$$\alpha = \pm n \sqrt{-1},$$

et, par conséquent,

$$y = C_1 e^{nx\sqrt{-1}} + C_2 e^{-nx\sqrt{-1}} = A \cos nx + B \sin nx;$$

2° Soit encore

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = 0;$$

les trois racines de l'équation en α qu'il faut résoudre sont ici :

$$\alpha_1 = 2, \quad \alpha_2 = -1 + \sqrt{-2}, \quad \alpha_3 = -1 - \sqrt{-2},$$

et l'on a

$$y = Ce^{2x} + e^{-x} [A \cos (x\sqrt{2}) + B \sin (x\sqrt{2})].$$

CAS DES RACINES ÉGALES.

199. Lorsque l'équation (5) a des racines égales, les termes correspondant à ces racines, dans l'équation (4), se réduisent en un seul, et l'on a plus l'intégrale générale, puisque le nombre de constantes arbitraires est inférieur à m . Mais on

peut encore, dans ce cas, en déduire l'intégrale générale au moyen de l'artifice suivant qui est dû à D'Alembert.

Supposons d'abord que l'on ait deux racines égales, et soit $a_2 = a_1$. On peut altérer infiniment peu les coefficients de l'équation (1), de manière que l'équation (5) n'ait plus de racines égales. Alors, en supposant

$$a_2 = a_1 + \delta,$$

on aura

$$y = C_1 e^{a_1 x} + C_2 e^{a_1 x + \delta x} + \dots + C_m e^{a_m x} \\ = (C_1 + C_2 e^{\delta x}) e^{a_1 x} + \dots + C_m e^{a_m x},$$

ou

$$y = e^{a_1 x} \left(C_1 + C_2 + C_2 \delta x + C_2 \frac{\delta^2 x^2}{1.2} + \dots \right) + \dots + C_m e^{a_m x},$$

ou bien encore en posant

$$C_1 + C_2 = C, \quad C_2 \delta = C',$$

$$y = e^{a_1 x} \left(C + C' + C' \delta \frac{x^2}{1.2} + C \frac{\delta^2 x^3}{1.2.3} + \dots \right) + C_3 e^{a_3 x} \dots + C_m e^{a_m x}.$$

Maintenant si l'on fait $\delta = 0$, on trouvera

$$y = e^{a_1 x} (C + C'x) + C_3 e^{a_3 x} + C_4 e^{a_4 x} \dots + C_m e^{a_m x},$$

expression qui renferme m constantes arbitraires, et qui est, par conséquent, l'intégrale générale de l'équation proposée.

Le cas où l'on a trois racines égales $a_1 = a_2 = a_3$, se ramène facilement à celui où l'on n'en a que deux; car en posant d'abord $a_1 = a_2$, on a

$$y = e^{a_1 x} (C + C_1 x) + C_3 e^{a_3 x} + \dots + C_m e^{a_m x};$$

faisant ensuite $a_3 = a_1 + \delta$, et développant, il vient

$$y = e^{a_1 x} \left[C + C_1 + (C' + C_1 \delta)x + C_3 \frac{\delta^2 x^2}{1.2} + C_3 \frac{\delta^3 x^3}{1.2.3} + \dots \right] \\ + C_4 e^{a_4 x} + \dots + C_m e^{a_m x},$$

ou en posant

$$C + C_3 = C, \quad C' + C_3\delta = C', \quad C_3 \frac{\delta^3}{1.2} = C'',$$

$$y = e^{a_1 x} \left(C + C'x + C''x^2 + \frac{C''' \delta^3 x^3}{3} + \dots \right) + C_4 e^{a_2 x} + \dots + C_m e^{a_m x},$$

équation qui satisfait encore à la proposée, et, cela, quelque soit δ . Donc, pour $\delta = 0$, on a

$$y = e^{a_1 x} (C + C'x + C''x^2) + C_4 e^{a_1} + \dots + C_m e^{a_m x},$$

expression qui représente l'intégrale générale, puisqu'elle renferme m constantes arbitraires.

On procéderait de la même manière si l'on avait quatre racines égales; et l'on voit que, dans ce cas, les quatre termes correspondant à ces racines, dans l'équation (4), seraient remplacés par l'expression

$$e^{a_1 x} (C + C'x + C''x^2 + C'''x^3),$$

en sorte que la valeur de y deviendrait

$$y = e^{a_1 x} (C + C'x + C''x^2 + C'''x^3) + C_4 e^{a_1 x} + \dots + C_m e^{a_m x}.$$

En général, si l'on a n racines égales à a_1 , on aura pour l'intégrale générale

$$y = e^{a_1 x} (C + C'x + C''x^2 + C'''x^3 + \dots + C^{(n)} x^{(n)}) \\ + C_{n+1} e^{a_{n+1} x} + \dots + C_m e^{a_m x}.$$

INTÉGRATION DE L'ÉQUATION LINÉAIRE A COEFFICIENTS CONSTANTS,
MAIS DONT LE SECOND MEMBRE EST UNE FONCTION DE x .

200. Soit l'équation

$$(1) \quad \frac{d^m y}{dx^m} + P \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + Q \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots + T \frac{dy}{dx} + Uy = F(x)$$

On aura de même

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{a_1 + \int F(x)e^{-a_1x} dx}{f(a_1)}, \\ C_2 &= \frac{a_2 + \int F(x)e^{-a_2x} dx}{f'(a_2)}, \\ &\dots \dots \dots \\ C_m &= \frac{a_m + \int F(x)e^{-a_mx} dx}{f'(a_m)}. \end{aligned}$$

Pour l'intégrale cherchée, on aura donc

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} y &= \frac{\left[a_1 + \int F(x)e^{-a_1x} dx \right]}{f(a_1)} e^{a_1x} \\ &+ \frac{\left[a_2 + \int F(x)e^{-a_2x} dx \right]}{f'(a_2)} e^{a_2x} \\ &\dots \dots \dots \\ &+ \frac{\left[a_m + \int F(x)e^{-a_mx} dx \right]}{f'(a_m)} e^{a_mx} \end{aligned} \right.$$

201. Pour donner une application de ce qui précède, soit proposé d'intégrer l'équation linéaire du second ordre

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P \frac{dy}{dx} + Qy = V,$$

dans laquelle P et Q désignent des constantes, et V une fonction de x . En intégrant d'abord l'équation privée de second membre

$$\frac{d^2y}{dx^2} + P \frac{dy}{dx} + Qy = 0.$$

nous aurons

$$y = C_1 e^{a_1 x} + C_2 e^{a_2 x},$$

a_1 et a_2 étant les racines de l'équation

$$a^2 + Pa + Q = 0.$$

Nous aurons alors pour déterminer $\frac{dC_1}{dx}$, $\frac{dC_2}{dx}$ les deux équations

$$\begin{aligned} \frac{dC_1}{dx} e^{a_1 x} + \frac{dC_2}{dx} e^{a_2 x} &= 0, \\ \frac{dC_1}{dx} a_1 e^{a_1 x} + \frac{dC_2}{dx} a_2 e^{a_2 x} &= V; \end{aligned}$$

d'où l'on tire par l'élimination

$$\frac{dC_1}{dx} = \frac{V e^{-a_1 x}}{a_2 - a_1}, \quad \frac{dC_2}{dx} = \frac{V e^{-a_2 x}}{a_1 - a_2},$$

et, par suite,

$$\begin{aligned} C_1 &= \frac{c_1 + \int V e^{-a_1 x} dx}{a_2 - a_1}, \\ C_2 &= \frac{c_2 + \int V e^{-a_2 x} dx}{a_1 - a_2}, \end{aligned}$$

Pour l'intégrale générale, nous aurons donc

$$y = \frac{\left(c_1 + \int V e^{-a_1 x} dx \right) e^{-a_1 x} - \left(c_2 + \int V e^{-a_2 x} dx \right) e^{a_2 x}}{a_1 - a_2}.$$

202. Maintenant, si l'équation

$$a^2 + Pa + Q = 0$$

a ses racines a_1 , a_2 imaginaires, il faudra prendre pour la valeur de y

$$y = e^{ax}(C_1 \cos 6x + C_2 \sin 6x),$$

et alors on aura, pour déterminer C_1 et C_2 ,

$$\frac{dC_1}{dx} e^{ax} \cos 6x + \frac{dC_2}{dx} e^{ax} \sin 6x = 0,$$

$$\frac{dC_1}{dx} (ae^{ax} \cos 6x - 6e^{ax} \sin 6x) + \frac{dC_2}{dx} (ae^{ax} \sin 6x + 6e^{ax} \cos 6x) = V;$$

d'où

$$\frac{dC_1}{dx} = -\frac{Ve^{-ax} \sin 6x}{6}, \quad \frac{dC_2}{dx} = \frac{Ve^{-ax} \cos 6x}{6},$$

et

$$C_1 = \frac{c_1 - \int Ve^{-ax} \sin 6x dx}{6},$$

$$C_2 = \frac{c_2 - \int Ve^{-ax} \cos 6x dx}{6}.$$

On aura, par suite,

$$y = e^{ax} \frac{\left[\left(c_1 - \int Ve^{-ax} \sin 6x dx \right) \cos 6x + \left(c_2 - \int Ve^{-ax} \cos 6x dx \right) \sin 6x \right]}{6}$$

valeur qui est entièrement réelle.

203. Si les racines de l'équation

$$a^2 + Pa + Q = 0$$

étaient égales, l'expression de y donnée n° (201) se réduirait à la forme $\frac{0}{0}$. On obtiendrait la vraie valeur de cette expression en différentiant par rapport à a , son numérateur et son dénominateur, puis faisant $a_2 = a_1$, ce qui donnerait

$$y = - \left(\int x V e^{-a_1 x} dx \right) e^{a_1 x} + \left(c_2 + \int V e^{-a_1 x} dx \right) e^{a_1 x},$$

ou en rétablissant, dans le premier terme, la constante c_1 ,

$$y = \left(c_1 - \int x V e^{-a_1 x} dx \right) e^{a_1 x} + \left(c_2 + \int V e^{-a_1 x} dx \right) x e^{a_1 x},$$

expression qui est l'intégrale générale de la proposée, puisqu'elle renferme deux constantes arbitraires c_1 et c_2 .

204. Dans le cas particulier où $V = 0$, cette expression se réduit à celle

$$y = (c_1 + c_2 x) e^{a_1 x},$$

ce qui s'accorde avec ce qui a été dit au n° (199).

ÉQUATIONS LINÉAIRES QUE L'ON PEUT INTÉGRER GÉNÉRALEMENT.

205. On peut intégrer généralement toute équation de la forme

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} (ax + b)^m \frac{d^m y}{dx^m} + P(ax + b)^{m-1} \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + Q(ax + b)^{m-2} \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} + \dots \\ + T(ax + b) \frac{dy}{dx} + Uy = 0 \end{aligned} \right.$$

dans laquelle $P, Q, \dots, T, U$, sont des constantes. Car, en posant $y = (ax + b)^z$, et substituant dans (1), on obtient, après avoir divisé par $(ax + b)^z$,

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} z(z-1)(z-2)\dots(z-m+1)a^m \\ + Pz(z-1)\dots(z-m+2)a^{m-1} + \dots + U = 0, \end{aligned} \right.$$

équation de degré m , qui donne pour z , m valeurs constantes $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$, en sorte que désignant par c_1, c_2, c_m des constantes arbitraires, on a pour l'intégrale générale

$$y = c_1(ax + b)^{\alpha_1} + c_2(ax + b)^{\alpha_2} + \dots + c_m(ax + b)^{\alpha_m}.$$

Il faudrait modifier, comme on l'a vu n^o (197) et (199), la forme de cette intégrale, si l'équation en α avait des racines imaginaires ou égales.

DES ÉQUATIONS LINÉAIRES DU SECOND ORDRE.

206. Considérons l'équation linéaire du second ordre

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + P \frac{dy}{dx} + Qy = 0,$$

dans laquelle P et Q désignent des fonctions de x .

On a par hypothèse

$$(2) \quad \frac{d^2 y_1}{dx^2} + P \frac{dy_1}{dx} + Qy_1 = 0;$$

et, en multipliant la première de ces équations par y_1 , la seconde par y , puis les retranchant l'une de l'autre, il vient

$$y_1 \left(\frac{d^2 y}{dx^2} - y \frac{d^2 y_1}{dx^2} \right) + P \left(y_1 \frac{dy}{dx} - y \frac{dy_1}{dx} \right) = 0.$$

Posons

$$(3) \quad y_1 \frac{dy}{dx} - y \frac{dy_1}{dx} = u,$$

d'où

$$y_1 \frac{d^2 y}{dx^2} - y \frac{d^2 y_1}{dx^2} = \frac{du}{dx}.$$

On aura

$$(4) \quad \frac{du}{dx} + Pu = 0,$$

et, par suite,

$$u = Ce^{-\int P dx}.$$

D'après cela, on aura donc

$$(5) \quad y_1 \frac{dy}{dx} - y \frac{dy_1}{dx} = Ce^{-\int P dx}$$

ou

$$d \frac{y}{y_1} = \frac{C e^{-\int v dx}}{y_1^2} dx$$

et, par conséquent,

$$(6) \quad y = C' y_1 + C'' y_1 \int \frac{e^{-\int v dx}}{y_1^2} dx.$$

207. L'équation (5) fait connaître plusieurs propriétés importantes de l'équation sans second membre

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + P \frac{dy}{dx} + Qy = 0.$$

Et d'abord l'on voit que la fonction y et sa dérivée $\frac{dy}{dx}$ ne peuvent pas être nulles en même temps. Car si cela était, il faudrait que la constante C fût nulle; ce qui ne peut avoir lieu dans le cas général.

On voit ensuite que, entre deux valeurs x_0 et x_1 de x qui annulent y , il doit se trouver au moins une valeur de x qui fasse évanouir y . En effet, la fonction y , s'annulant pour $x = x_0$ et $x = x_1$, on a pour l'une et l'autre de ces valeurs, d'après l'équation (5),

$$y \frac{dy_1}{dx} < 0.$$

Ainsi, y et $\frac{dy_1}{dx}$ sont de signes contraires. Mais quand x

croît de x_0 à x_1 , $\frac{dy_1}{dx}$ change de signe pour une certaine va-

leur α de x ; donc y doit aussi changer de signe avant que x devienne égal à x_1 ; et l'on en conclut que la fonction y doit s'évanouir dans l'intervalle de x_0 à x_1 . On verrait de même que, entre deux valeurs de x qui annulent y , il doit se trouver au moins une valeur de x qui annule y_1 . Il en résulte que si l'on fait croître x d'une manière continue, les deux fonctions y

et y , s'annuleront alternativement. Par exemple, l'équation

$$\frac{d^2y}{dx^2} + y = 0$$

a pour intégrale

$$y = C \sin x + C' \cos x,$$

et l'on vérifie aisément que les deux courbes représentées par les équations $y = \sin x$, et $y = \cos x$ coupent alternativement l'axe des abscisses, et, par conséquent, s'annulent l'une après l'autre.

CHAPITRE VIII.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES AU MOYEN DES SÉRIES.

DÉVELOPPEMENT PAR LA SÉRIE DE MACLAURIN.

208. Une équation différentielle d'ordre quelconque

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \dots, \frac{d^my}{dx^m}\right) = 0$$

étant donnée, on peut se proposer de développer en série la fonction y qu'elle renferme; et nous avons vu comment les théorèmes de Taylor et de Maclaurin s'appliquaient à ce développement. On obtient, par ce moyen, une valeur approchée de l'intégrale, si la série est convergente.

Soit, par exemple, l'équation

$$\frac{dy}{dx} + ay + bx^3 = 0.$$

En la différentiant un nombre quelconque de fois, on a

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a \frac{dy}{dx} + 3bx^2 = 0,$$

$$\frac{d^3y}{dx^3} + a \frac{d^2y}{dx^2} + 6bx = 0,$$

$$\frac{d^4y}{dx^4} + a \frac{d^3y}{dx^3} + 6b = 0,$$

et faisant $x = 0$ dans toutes ces équations, on trouve

$$\left(\frac{dy}{dx}\right)_0 = -ay_0, \quad \left(\frac{d^2y}{dx^2}\right)_0 = a^2y_0, \quad \left(\frac{d^3y}{dx^3}\right)_0 = -a^3y_0,$$

$$\left(\frac{d^4y}{dx^4}\right)_0 = a^4y_0 - 6b, \quad \left(\frac{d^5y}{dx^5}\right)_0 = -a^5y_0 + 6ba, \dots$$

On a donc

$$y = y_0 \left(1 - ax + \frac{a^2x^2}{1.2} - \frac{a^3x^3}{1.2.3} + \dots \right) \\ - 6b \left(\frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{ax^5}{1.2.3.4.5} + \frac{a^2x^6}{1.2.3.4.5.6} \right),$$

ou

$$y = y_0 e^{-ax} - \frac{6b}{a^4} \left(e^{-ax} - 1 + ax - \frac{a^2x^2}{1.2} + \frac{a^3x^3}{1.2.3} \right)$$

ou bien, en remplaçant $y_0 - \frac{6b}{a^4}$ par une constante arbitraire C ,

$$y = Ce^{-ax} + \frac{6b}{a^4} \left(1 - ax + \frac{a^2x^2}{1.2} - \frac{a^3x^3}{1.2.3} \right).$$

209. Lorsqu'il arrive que pour $x = 0$, certaines dérivées deviennent infinies, alors la série ne contenant plus un nombre m de constantes arbitraires ne représente plus l'intégrale générale de l'équation proposée, mais seulement une intégrale particulière. Dans ce cas, on obtient l'intégrale générale par le procédé du n° (191).

Soit, par exemple, l'équation du second ordre

$$(1) \quad x \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + nxy = 0.$$

En la différentiant un nombre infini de fois, on trouve

$$x \frac{d^3 y}{dx^3} + 3 \frac{d^2 y}{dx^2} + nx \frac{dy}{dx} + ny = 0,$$

$$x \frac{d^4 y}{dx^4} + 4 \frac{d^3 y}{dx^3} + nx \frac{d^2 y}{dx^2} + 2n \frac{dy}{dx} = 0,$$

$$x \frac{d^5 y}{dx^5} + 5 \frac{d^4 y}{dx^4} + nx \frac{d^3 y}{dx^3} + 3n \frac{d^2 y}{dx^2} = 0,$$

$$\dots \dots \dots x \frac{d^{m+1} y}{dx^{m+1}} + (m+1) \frac{d^m y}{dx^m} + nx \frac{d^{m-1} y}{dx^{m-1}} + (m-1)n \frac{d^{m-2} y}{dx^{m-2}} = 0.$$

Faisant dans toutes ces équations $x = 0$, on a

$$\frac{dy}{dx} = 0, \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{ny}{3}, \quad \frac{d^3 y}{dx^3} = 0, \quad \frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{n^2 y}{5}, \dots$$

La formule de Maclaurin donne alors

$$y = y_0 \left(1 - \frac{nx^2}{1.2.3} + \frac{n^2 x^4}{1.2.3.4.5} - \dots \right) = y_0 \frac{\sin x \sqrt{n}}{x \sqrt{n}},$$

et en remplaçant $\frac{y_0}{\sqrt{n}}$ par une constante arbitraire C , on obtient

$$y = \frac{C \sin x \sqrt{n}}{x},$$

expression qui n'est qu'une intégrale particulière de la proposée (1), puisqu'elle ne renferme qu'une seule constante arbitraire. Pour obtenir l'intégrale générale, il faut, conformément à ce qui a été dit au n° (191), considérer C comme une fonction de x ; et l'on est ainsi conduit à une équation linéaire du premier ordre, d'où l'on déduit

$$C = C' + C'' \cot x \sqrt{n}.$$

C' et C'' étant deux constantes arbitraires. L'intégrale générale est donc

$$(2) \quad y = \frac{C' \sin x \sqrt{n} + C'' \cos x \sqrt{n}}{x},$$

Si au lieu de la formule de Maclaurin, on s'était servi de celle de Taylor pour le développement de y en série, on serait parvenu à un résultat identique à celui (2).

MÉTHODE DES COEFFICIENTS INDÉTERMINÉS.

210. La méthode des coefficients indéterminés offre un nouveau moyen de parvenir au développement en série de l'intégrale d'une équation différentielle donnée.

Pour en donner un exemple, nous prendrons l'équation déjà traitée dans le numéro précédent et que l'on peut écrire sous la forme :

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + n^2y = 0.$$

Soit

$$y = a_1 x^\alpha + a_2 x^\beta + a_3 x^\gamma + \dots$$

son intégrale, α , β , γ , étant des nombres croissants, et a_1 , a_2 , a_3 ... des coefficients qu'il s'agit de déterminer ainsi que α , β , γ ... On aura

$$ny = na_1 x^\alpha + na_2 x^\beta + na_3 x^\gamma + \dots,$$

$$\frac{dy}{dx} = a_1 \alpha x^{\alpha-1} + a_2 \beta x^{\beta-1} + a_3 \gamma x^{\gamma-1} + \dots,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = a_1 \alpha(\alpha-1) x^{\alpha-2} + a_2 \beta(\beta-1) x^{\beta-2} + a_3 \gamma(\gamma-1) x^{\gamma-2} + \dots,$$

et subsistant dans la proposée, il viendra

$$\begin{aligned} a_1 \alpha(\alpha+1) x^{\alpha-2} + n^2 a_1 x^\alpha + a_2 \beta(\beta+1) x^{\beta-2} + n^2 a_2 x^\beta \\ + a_3 \gamma(\gamma+1) x^{\gamma-2} + n^2 a_3 x^\gamma + \dots = 0. \end{aligned}$$

Or, cette équation devant être identique, il faut que les coefficients des différentes puissances de x soient nuls sépa-

rément ; et comme le plus petit exposant est $\alpha - 2$, on devra avoir, avant tout,

$$a_1 \alpha (\alpha + 1) = 0 ;$$

ce qui exige que l'on ait $\alpha = -1$ ou $\alpha = 0$, a_1 ne pouvant être nul.

Soit d'abord $\alpha = -1$. Les exposants les plus petits qui viennent après α sont α' et $\beta - 2$; et il peut se faire que l'on ait $\beta - 2 = \alpha$, ou $\beta - 2 < \alpha$. Soit $\beta - 2 < \alpha$: alors le terme $a_2 \beta (\beta + 1) x^{\beta-2}$ ne pouvant se réduire avec un autre devra être nul de lui-même, ce qui exige que l'on ait $\beta = 0$, ou $\beta = -1$; et il faudra toujours prendre $\beta = 0$, car on a par hypothèse $\alpha < \beta$. Les exposants qui viennent ensuite sont α et $\gamma - 2$; on devra poser $\alpha = \gamma - 2$, car le terme $n a x^2$ ne pouvant s'évanouir séparément, devra se réduire avec un autre. Donc :

$$\gamma = 1, \quad a_1 n^2 + a_3 \gamma (\gamma + 1) = 0.$$

On trouvera de la même manière

$$\delta = 2, \quad a_2 n^2 + a_4 \delta (\delta + 1) = 0$$

$$\varepsilon = 3, \quad a_3 n^2 + a_5 \varepsilon (\varepsilon + 1) = 0$$

.....

On tire de ces équations pour les coefficients

$$a_3 = -\frac{a_1 n^2}{1.2}, \quad a_4 = -\frac{a_2 n^2}{1.2.3},$$

$$a_5 = \frac{a_3 n^4}{1.2.3.4}, \quad a_6 = \frac{a_4 n^4}{1.2...5}.$$

.....

On a donc

$$y = a_1 \left(\frac{1}{x} - \frac{n^2 x}{1.2} + \frac{n^4 x^3}{1.2.3.4} - \right) \\ + a_2 \left(1 - \frac{n^2 x^2}{1.2.3} + \frac{n^4 x^4}{1.2...5} - \right),$$

ou

$$y = \frac{a_1 \cos nx}{x} + \frac{a_2 \sin nx}{nx}$$

ou bien encore, en posant $a_1 = C$, $\frac{a_2}{n} = C'$,

$$y = \frac{C \cos nx + C' \sin nx}{x}.$$

Nous avons supposé dans ce qui précède $\delta - 2 < \alpha$. Si $\delta - 2 = \alpha = -1$, on aura $\delta = 1$; et le terme $a_\gamma (\gamma + 1)x^{\gamma-2}$ n'étant pas nul puisque $\gamma > \delta > 1$, ce terme devra être détruit par celui $a_\delta n^2 x \delta$; donc $\gamma - 2 = \delta$, et de même

$$\delta - 2 = \gamma, \quad \varepsilon - 2 = \delta, \dots$$

On a ainsi pour les exposants

$$\delta = 1, \quad \gamma = 3, \quad \delta = 5, \quad \varepsilon = 7, \dots,$$

et pour les coefficients

$$a_2 = -\frac{a_1 n^2}{1.2}, \quad a_3 = \frac{a_1 n^4}{1.2.3.4}, \quad a_4 = -\frac{a_1 n^6}{1.2.3\dots 6} \dots$$

Donc

$$y = a_1 \left(\frac{1}{x} - \frac{n^2 x}{1.2} + \frac{n^4 x^3}{1.2.3.4} - \dots \right) = \frac{a_1 \cos nx}{x},$$

expression qui est une intégrale particulière puisqu'elle ne renferme qu'une constante arbitraire.

Si maintenant on prend $\alpha = 0$, on trouvera

$$\alpha = 0, \quad \delta = 2, \quad \gamma = 4, \quad \varepsilon = 6$$

$$a_2 = -\frac{a_1 n^2}{1.2.3}, \quad a_3 = \frac{a_1 n^4}{1.2.3\dots 5} \dots$$

et, par suite,

$$y = \frac{a_2 \sin nx}{nx},$$

expression qui est encore une intégrale particulière. En ajoutant les deux intégrales particulières qui précèdent, et faisant

$a_1 = C$, $\frac{a_2}{n} = C'$, on obtient pour l'intégrale générale

$$y = \frac{C \cos nx + C' \sin nx}{x}.$$

AUTRE MÉTHODE D'INTÉGRATION.

211. On peut donner une autre forme au développement en série de l'intégrale d'une équation différentielle d'ordre supérieur.

Considérons, par exemple, l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + P \frac{dy}{dx} + Qy = 0$$

où P et Q désignent toujours des fonctions quelconques de x . On peut d'abord ramener cette équation à celle plus simple

$$(2) \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = Rz.$$

Car si l'on pose $y = uz$, on aura

$$(3) \quad u \frac{d^2 z}{dx^2} + \left(2 \frac{du}{dx} + Pu \right) \frac{dz}{dx} + \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + P \frac{du}{dx} + Qu \right) z = 0,$$

et déterminant u par la condition

$$2 \frac{du}{dx} + Pu = 0,$$

il viendra

$$(4) \quad u = e^{-\frac{1}{2} \int P dx},$$

valeur qui, substituée dans l'équation (5), la réduira à la forme (2).

Cela posé, cherchons à développer la valeur de z en série convergente. Soient Z et Z' les valeurs que prennent z et $\frac{dz}{dx}$ pour une certaine valeur x_0 de x . En intégrant, entre les limites x_0 et x , les deux membres de l'équation

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = Rz, \quad \text{ou} \quad d \frac{dz}{dx} = Rz dx,$$

on aura

$$\frac{dz}{dx} = Z' + \int_{x_0}^x Rz dx;$$

et par une seconde intégration

$$z = Z + Z'(x - x_0) + \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x Rz dx$$

ou en posant pour abréger

$$\begin{aligned} t &= Z + Z'(x - x_0), \\ (5) \quad z &= t + \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x Rz dx. \end{aligned}$$

Maintenant si l'on remplace sous le signe $\int$, z par sa valeur (5), on aura

$$\begin{aligned} z &= t + \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x R t dx \\ &\quad + \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x R dx \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x Rz dx, \end{aligned}$$

et si dans cette dernière on fait la même substitution, on obtiendra

$$\begin{aligned} z &= t + \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x R t dx \\ &\quad + \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x R dx \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x R t dx \\ &\quad + \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x R dx \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x R dx \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x Rz dx. \end{aligned}$$

En continuant de la sorte, on parviendra à exprimer la valeur de z au moyen d'une série indéfinie de termes dont chacun se déduira du précédent en multipliant par Rdx et intégrant deux fois de suite par rapport à x entre les limites x_0 et x . Il y aura exception, toutefois, pour le dernier terme qui contiendra toujours la fonction inconnue z ; mais nous allons prouver que ce dernier terme tend vers zéro, à mesure que le nombre des termes de la série augmente, en sorte qu'il sera toujours possible de faire servir cette série au calcul approché de la valeur de z .

Admettons, à cet effet, que x croisse d'une manière continue entre les limites x_0 et x ; et soient ζ , μ , λ les valeurs maximum de R , z , t , entre les mêmes limites, en sorte que $R < \zeta$, $z < \mu$, $t < \lambda$. Si l'on peut trouver pour μ une valeur finie, il sera démontré par là que z ne peut devenir infinie pour des valeurs de x comprises entre les limites x_0 et x . Or, puisque entre ces mêmes limites, on a

$$Rt < \zeta\lambda,$$

on aura aussi

$$\int_{x_0}^x Rtdx < \int_{x_0}^x \zeta\lambda dx,$$

ou si l'on veut

$$\int_{x_0}^x Rtdx < \zeta\lambda(x - x_0)$$

En intégrant successivement les deux membres de cette inégalité par rapport à x , on en déduira

$$\int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x Rtdx < \zeta\lambda \frac{(x - x_0)^2}{1.2},$$

$$\int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x Rdx \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x Rtdx < \zeta^2\lambda \frac{(x - x_0)^4}{1.2.3.4},$$

$$\int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x Rdx \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x Rdx \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x Rtdx < \zeta^3\lambda \frac{(x - x_0)^6}{1.2.3.4.5.6};$$

et, ainsi de suite.

De même, puisque entre les limites x_0 et x , on a

$$Rz < \mu\zeta.$$

on aura

$$\int_{x_0}^x Rz dx < \int_{x_0}^x \mu\zeta dx$$

ou

$$\int_{x_0}^x Rz dx < \mu\zeta(x - x_0),$$

et par l'intégration successive des deux membres de cette inégalité, on en déduira

$$\int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x Rz dx < \mu\zeta \frac{(x - x_0)^2}{1.2},$$

$$\int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x R dx \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x Rz dx < \mu\zeta^2 \frac{(x - x_0)^3}{1.2.3.4}.$$

En général, on aura

$$\int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x R dx \dots \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x Rz dx < \mu\zeta^n \frac{(x - x_0)^{n+1}}{1.2.3\dots 2n}.$$

En vertu de ces inégalités, la valeur de z donne

$$z < \zeta + \zeta\lambda \frac{(x - x_0)}{1.2} + \frac{\zeta\lambda^2(x - x_0)^2}{1.2.3.4} + \dots + \frac{\zeta\lambda^n(x - x_0)^{n+1}}{1.2.3\dots 2n}$$

inégalité qui a lieu, à *fortiori*, si l'on prolonge indéfiniment la série du second membre

$$\zeta + \zeta\lambda \frac{(x - x_0)}{1.2} + \frac{\zeta\lambda^2(x - x_0)^2}{1.2.3.4} + \dots$$

Mais cette série ainsi prolongée a pour somme

$$\frac{1}{2}\zeta \left[e^{(x-x_0)\sqrt{\lambda}} + e^{-(x-x_0)\sqrt{\lambda}} \right].$$

Donc

$$z < \frac{1}{2}\zeta \left[e^{(x-x_0)\sqrt{\lambda}} + e^{-(x-x_0)\sqrt{\lambda}} \right] + \frac{\mu\lambda^n(x - x_0)^{n+1}}{1.2.3\dots 2n}.$$

Maintenant si l'on observe que le terme

$$\frac{\lambda^n (x - x_0)^{2n}}{1.2 \ 3.2n} \quad \text{ou} \quad \frac{[(x - x_0) \sqrt{\lambda}]^{2n}}{1.2 \ 3...2n}$$

décroît indéfiniment à mesure que le nombre n augmente, on voit que ce terme pourra devenir plus petit que toute grandeur donnée ϵ . En prenant n suffisamment grand et désignant par M la plus grande des valeurs que peut prendre $\frac{1}{2} \zeta \left[e^{(x-x_0)\sqrt{\lambda}} + e^{-(x-x_0)\sqrt{\lambda}} \right]$ dans l'intervalle de x_0 à x , on aura donc

$$z < M + \mu_1;$$

et cette inégalité ayant lieu pour toutes les valeurs de x , comprises entre x_0 et x , on pourra remplacer z par sa valeur maximum μ , ce qui donnera

$$\mu < M + \mu_1,$$

d'où

$$\mu < \frac{M}{1 - \epsilon}$$

Ainsi

$$\mu < M.$$

Il est donc démontré par là que μ ne peut devenir infini, et, par suite, que le reste de la série tend vers zéro à mesure que le nombre des termes augmente; en sorte que cette série est convergente et a pour somme l'intégrale z .

212. On peut parvenir d'une autre manière au développement de l'intégrale

$$z = t + \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x R t dx + \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x R dx \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x R t dx + \dots$$

En effet, posons

$$z = u_0 + u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n,$$

$u_0, u_1, u_2, \dots u_n$ étant des fonctions de x qu'il s'agit de déterminer, fonctions qui sont liées entre elles par la relation $\frac{d^2 z}{dx^2} = Rz$, ou

$$\sum \frac{d^2 u}{dx^2} = \sum Ru$$

u devant être remplacé successivement, dans cette équation, par $u_0, u_1, u_2 \dots u_n$.

On satisfera à cette équation, en posant

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0, \frac{d^2 u_1}{dx^2} = Ru_0, \frac{d^2 u_2}{dx^2} = Ru_1, \dots$$

et si l'on désigne, comme au n° (211), par Z et Z' les valeurs que doivent prendre u_0 et $\frac{du_0}{dx}$ pour une valeur donnée x_0 de x , puis que l'on suppose

$$u_1 = 0, u_2 = 0 \dots u_n = 0$$

$$\frac{du_1}{dx} = 0, \frac{du_2}{dx} = 0 \dots \frac{du_n}{dx} = 0,$$

on en déduira

$$u_0 = Z + Z'(x - x_0) = t,$$

$$u_1 = \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x R t dx,$$

$$u_2 = \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x R dx \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x R t dx,$$

$$u_3 = \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x R dx \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x R dx \int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x R t dx;$$

et, ainsi de suite.

En employant un raisonnement semblable à celui du n° (211), on prouvera ensuite la convergente de la série $z = u_0 + u_1 + \dots + u_n$.

DÉTERMINATION DES SÉRIES PAR L'INTÉGRATION
D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES.

213. Nous venons de voir comment, une équation différentielle étant donnée, on pouvait en déduire l'intégrale sous la forme d'une série. Or, réciproquement, étant donnée l'intégrale d'une équation différentielle sous même forme, on peut se proposer d'en déduire cette équation.

Soit, pour exemple, la série

$$y = 1 - \frac{x^2}{1.2} + \frac{x^4}{1.2.3.4} - \frac{x^6}{1.2.3.4.5.6} + \dots$$

qui est égale, comme on le sait, à $\cos x$.

En la différentiant deux fois de suite, on a

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -1 + \frac{x^2}{1.2} - \frac{x^4}{1.2.3.4} + \dots$$

nouvelle série qui ne diffère de la proposée qu'en ce que le signe $-y$ est remplacé par le signe $+$. On peut donc l'éliminer, ce qui donne pour l'équation différentielle cherchée

$$\frac{d^2y}{dx^2} = -y.$$

En effet, en intégrant cette équation qui est linéaire, on a

$$y = C \cos x + C' \sin x.$$

Mais $C = 0$ et $C' = 1$; donc $y = \cos x$.

Soit encore la série

$$y = 1 - \frac{x^2}{2^1} + \frac{x^4}{2^2.4^1} - \frac{x^6}{2^3.4^2.6^1} + \dots$$

En la différentiant, on a

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{2} + \frac{x^3}{2^3 \cdot 4} - \frac{x^5}{2^3 \cdot 4^3 \cdot 6} + \dots$$

On peut faire disparaître le dernier facteur des dénominateurs des chaque terme, en multipliant les deux membres par x , puis les différentiant, ce qui donne

$$\begin{aligned} x \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} &= -x + \frac{x^3}{2^2} + \frac{x^5}{2^3 \cdot 4^2} + \frac{x^7}{2^3 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \\ &= -x \left(1 - \frac{x^2}{2^2} + \frac{x^4}{2^3 \cdot 4^2} - \frac{x^6}{2^3 \cdot 4^2 \cdot 6^2} + \dots \right) \end{aligned}$$

La série entre parenthèses est celle proposée. En l'éliminant on a donc pour l'équation différentielle cherchée

$$x \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + xy = 0.$$

CHAPITRE IX.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES A L'AIDE D'INTÉGRALES DÉFINIES.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES A L'AIDE D'INTÉGRALES DÉFINIES.

214. On ramène quelquefois la recherche de l'intégrale générale d'une équation différentielle quelconque, à celle de l'intégrale définie d'une fonction renfermant x et une autre variable par rapport à laquelle l'intégration s'effectue, x étant regardée comme constante. Pour en donner un exemple, soit l'équation

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{m}{x} \frac{dy}{dx} + ny = 0,$$

dans laquelle m et n désignent deux constantes. En intégrant cette équation par la méthode des coefficients indéterminés, on trouve

$$y_1 = A \left[1 - \frac{nx^2}{1(m+1)} + \frac{n^2 x^4}{1.2(m+1)(m+3)} - \dots \right. \\ \left. + \frac{-n^p x^{2p}}{1.2.3...p(m+1)(m+3)...(m+2p-1)} + \dots \right],$$

et ensuite

$$y_2 = A' x^{1-m} \left[1 - \frac{nx^2}{1(3-m)} + \frac{n^2 x^4}{1.2(3-m)(5-m)} + \dots \right. \\ \left. + \frac{-n^p x^{2p}}{1.2.3...p(3-m)(5-m)...(1-m-2p)} + \dots \right].$$

Ces deux valeurs de y_1 et y_2 renferment chacune une constante arbitraire, et représentent, par conséquent, des intégrales particulières. En les ajoutant on aura donc l'intégrale générale, puisque celle-ci doit renfermer deux constantes arbitraires; on aura ainsi

$$y = y_1 + y_2.$$

On peut maintenant exprimer les valeurs de y_1 et y_2 au moyen d'intégrales définies; et il suffit de faire ce calcul pour la première seulement, attendu que la seconde s'en déduit immédiatement en changeant m en $2 - m$. Or, si l'on considère la série

$$\cos(\alpha \cos \theta) = 1 - \frac{\alpha^2 \cos^2 \theta}{1.2} + \frac{\alpha^4 \cos^4 \theta}{1.2.3.4} - \dots + \frac{(-\alpha^2)^p \cos^{2p} \theta}{1.2.3\dots 2p} + \dots$$

et que l'on multiplie les deux membres de cette série par $\sin^{m-1} \theta d\theta$, puis qu'on intègre entre les limites 0 et π , on aura, en observant que

$$\begin{aligned} & \int_0^\pi \cos^{2k} \theta \sin^m \theta d\theta \\ &= \frac{1.3.5\dots(2k-3)(2k-1)}{(\mu+2)(\mu+4)\dots(\mu+2k-2)(\mu+2k)} \int_0^\pi \sin^m \theta d\theta, \\ & \int_0^\pi \cos(\alpha \cos \theta) \sin^{m-1} \theta d\theta = \int_0^\pi \sin^{m-1} \theta d\theta - \dots \\ & \quad - \alpha^{2p} \int_0^\pi \sin^{m-1} \theta d\theta \\ & \quad + \frac{\alpha^{2p}}{1.2.3\dots p(m+1)(m+3)\dots(m+2p-1)} + \dots \end{aligned}$$

ou en faisant $\alpha = x\sqrt{n}$

$$\int_0^\pi \sin^{m-1} \theta d\theta \left[1 - \frac{nx^2}{1(m+1)} + \frac{n^2 x^4}{1.2(m+1)(m+3)} - \dots \right. \\ \left. + \frac{n^p x^{2p}}{1.2\dots p(m+1)(m+3)\dots(m+2p-1)} + \dots \right],$$

expression qui ne diffère de la série y , que du facteur constant $\int_0^\pi \sin^{m-1} \theta d\theta$. On peut faire rentrer ce facteur dans la constante Λ , ce qui donne

$$y_1 = \Lambda \int_0^\pi \cos(x\sqrt{n} \cos \theta) \sin^{m-1} \theta d\theta,$$

et, par suite,

$$y_2 = A'x^{1-m} \int_0^\pi \cos(x\sqrt{n} \cos \theta) \sin^{1-m} \theta d\theta.$$

On a donc

$$(2) \quad \begin{cases} y = \Lambda \int_0^\pi \cos(x\sqrt{n} \cos \theta) \sin^{m-1} \theta d\theta \\ \quad + A'x^{1-m} \int_0^\pi \cos(x\sqrt{n} \cos \theta) \sin^{1-m} \theta d\theta. \end{cases}$$

Cette expression représente l'intégrale générale de l'équation (1), tant que $m > 0$ et $m < 2$. En dehors de ces limites on aura l'une des deux parties de y qui deviendra infinie, et l'expression de y étant réduite à l'autre partie ne sera plus qu'une intégrale particulière. On devra alors pour obtenir l'intégrale générale recourir au procédé que nous avons fait connaître n° (206).

215. Examinons, en particulier, les cas où $m = 0$ et $m = 1$.

1° Soit $m = 0$, auquel cas l'équation (1) se réduit à

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2ny = 0.$$

Le premier terme de l'équation (2) devient illusoire, mais le second subsiste et se réduit à

$$y_2 = A'x \int_0^\pi \cos(x\sqrt{n} \cos \theta) \sin \theta d\theta,$$

ce qui est une intégrale particulière. En effectuant l'intégration et désignant par C une constante arbitraire, on trouve

$$y_1 = C \sin x\sqrt{n}.$$

La formule (2) donne ensuite pour l'intégrale générale

$$y = C \sin x \sqrt{n} + C_1 \cos x \sqrt{n}$$

C_1 désignant une seconde constante arbitraire.

2° Soit $m = 2$. On a

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{2}{x} \frac{dy}{dx} + 2ny = 0.$$

Le second terme de l'équation (2) devient illusoire, mais le premier subsiste, et en effectuant l'intégration, on trouve l'intégrale particulière

$$y_1 = \frac{C \sin x \sqrt{n}}{x}.$$

On a par suite pour l'intégrale générale

$$y = \frac{C \sin x \sqrt{n} + C_1 \cos x \sqrt{n}}{x}.$$

3° Soit enfin $m = 1$. Les deux termes de l'équation (2) se réduisent en un seul et y représente une intégrale particulière. On obtient dans ce cas l'intégrale générale, en ayant recours à l'artifice suivant que nous avons déjà employé dans le cas des racines égales n° (199).

Posons dans la valeur de y ,

$$m = 1 + \alpha;$$

cette valeur prendra la forme :

$$A x^{-\alpha} \int_0^\pi \cos(x \sqrt{n} \cos \theta) (\sin \theta)^{-\alpha} d\theta.$$

et l'on aura, en développant

$$x^{-\alpha} = 1 - \alpha/x + \frac{\alpha^2}{1.2} 1/x^2 - \dots,$$

puis

$$(\sin \theta)^{-\alpha} = 1 - \alpha l \sin \theta + \frac{\alpha^2}{1.2} l^2 \sin^2 \theta -$$

et ensuite

$$x^{-\alpha} (\sin \theta)^{-\alpha} = 1 - \alpha (lx + l \sin \theta) + \dots$$

en sorte que

$$y_2 = A' \int_0^\pi \cos(x \sqrt{n} \cos \theta) d\theta - A' \alpha \int_0^\pi \cos(x \sqrt{n} \cos \theta) (lx + l \sin \theta) d\theta.$$

On aura de même pour y_1

$$y_1 = A \int_0^\pi \cos(x \sqrt{n} \cos \theta) d\theta + A \alpha \int_0^\pi \cos(x \sqrt{n} \cos \theta) l \sin \theta d\theta.$$

et, par conséquent, en posant $A + A'$ égal à une constante arbitraire C ,

$$\begin{aligned} y = & C \int_0^\pi \cos(x \sqrt{n} \cos \theta) d\theta \\ & + (A - C) \alpha \int_0^\pi \cos(x \sqrt{n} \cos \theta) (lx + l \sin \theta) d\theta \\ & + A \alpha \int_0^\pi \cos(x \sqrt{n} \cos \theta) l \sin \theta d\theta. \end{aligned}$$

Si maintenant on fait tendre α vers zéro et $A\alpha$ vers une constante arbitraire C_1 , on aura à la limite

$$y = C \int_0^\pi \cos(x \sqrt{n} \cos \theta) d\theta + C_1 \int_0^\pi \cos(x \sqrt{n} \cos \theta) l (x \sin^2 \theta) d\theta,$$

expression qui est celle de l'intégrale générale cherchée.

CHAPITRE X.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SIMULTANÉES.

ÉLIMINATION DES VARIABLES DANS LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES SIMULTANÉES.

216. On appelle *équations différentielles simultanées d'ordre supérieur*, un système de m relations établies entre une variable x , m fonctions $y, z, \dots u$, de cette variable, et les dérivées des divers ordres de ces fonctions par rapport à cette variable.

On peut toujours ramener l'intégration d'un pareil système d'équations au cas d'une seule équation différentielle entre la variable x et l'une des fonctions inconnues $y, z, \dots u$, que renferment les proposées. Car le nombre de fonctions et d'équations étant le même, on pourra d'abord éliminer y entre les m équations données, et l'on aura ainsi $m-1$ équations entre $z, v, \dots u$. On pourra ensuite éliminer z entre ces $m-1$ équations restantes, ce qui donnera $m-2$ équations entre $v, \dots u$; et, ainsi de suite. Après $m-1$ éliminations, on sera donc conduit à une équation différentielle entre x et u , et de cette équation on pourra déduire u par l'intégration.

Il reste maintenant à montrer comment cette élimination peut se faire. A cet effet, considérons le cas où l'on a seulement deux équations entre la variable x , deux fonctions y, z ,

de cette variable, et les dérivées des divers ordres de ces fonctions par rapport à cette variable, savoir :

$$F\left(x; y \frac{dy}{dx} \dots \frac{d^m y}{dx^m}; z \frac{dz}{dx} \dots \frac{d^p z}{dx^p}\right) = 0$$

$$F_1\left(x; y \frac{dy}{dx} \dots \frac{d^n y}{dx^n}; z \frac{dz}{dx} \dots \frac{d^q z}{dx^q}\right) = 0.$$

En différenciant n fois la première de ces équations, et m fois la seconde, on obtiendra $m + n$ équations nouvelles, en sorte que joignant à ces $m + n$ équations les deux équations proposées, on aura en tout $m + n + 2$ équations renfermant y et ses dérivées jusqu'à l'ordre $m + n$, et entre lesquelles on pourra éliminer les $m + n + 1$ inconnues $y, \frac{dy}{dx}, \dots, \frac{d^{m+n} y}{dx^{m+n}}$ qu'elles renferment. Il en résultera une équation entre z et x dont l'ordre sera égal au plus grand des deux nombres $n + p, m + q$; et cette équation fera connaître z par l'intégration. On obtiendra de la même manière une équation entre x et y , d'où l'on déduira y . On voit par là comment on devrait opérer si l'on avait un plus grand nombre de fonctions et d'équations.

ÉQUATIONS SIMULTANÉES DU PREMIER ORDRE.

217. Considérons maintenant le cas particulier où l'on a m équations différentielles entre une variable x , m fonctions $y, z, \dots, u$, de cette variable et les dérivées premières de ces fonctions par rapport à cette variable ou $\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dx}, \dots, \frac{du}{dx}$. En tirant de la première de ces m équations la valeur de $\frac{dy}{dx}$ et la reportant dans les $m - 1$ autres; puis tirant de l'une de ces dernières $\frac{dz}{dx}$ pour la reporter dans les $m - 2$ autres; et ainsi

la caractéristique Φ désignant, dans cette équation, une fonction de $x, y, z, \dots u$.

RÉDUCTION D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS SIMULTANÉES D'ORDRE
QUELCONQUE A UN SYSTÈME DU PREMIER ORDRE.

219. On peut toujours ramener à un système d'équations simultanées du premier ordre plusieurs équations différentielles d'ordre quelconque. En effet, soit le système des deux équations

$$(1) \quad \begin{cases} F\left(x, y, \frac{dy}{dx} \dots \frac{d^m y}{dx^m}, z \frac{dz}{dx} \dots \frac{d^p z}{dx^p}\right), \\ F_1\left(x, y, \frac{dy}{dx} \dots \frac{d^m y}{dx^m}, z \frac{dz}{dx} \dots \frac{d^q z}{dx^q}\right). \end{cases}$$

En posant

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dx} &= y', \quad \frac{dy'}{dx} = y'', \quad \dots \quad \frac{dy^{(m-1)}}{dx} = y^{(m-1)}, \\ \frac{dz}{dx} &= z', \quad \frac{dz'}{dx} = z'', \quad \dots \quad \frac{dz^{(q-1)}}{dx} = z^{(q-1)}, \end{aligned}$$

on aura

$$\begin{aligned} F\left[x, y, y', y'' \dots \frac{dy^{(m-1)}}{dx}, z, z', z'', z^{(p)}\right] &= 0, \\ F_1\left[x, y, y', y'' \dots y^{(m)}, z, z', z'' \dots, \frac{dz^{(q-1)}}{dx}\right] &= 0, \end{aligned}$$

et le système (1) pourra être remplacé par le suivant qui est du premier ordre :

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} = y', \quad \frac{dy'}{dx} = y'' \dots \frac{dy^{(m-1)}}{dx} = y^{(m-1)}, \\ \frac{dz}{dx} = z', \quad \frac{dz'}{dx} = z'' \dots \frac{dz^{(q-2)}}{dx} = z^{(q-2)}; \\ F\left[x, y, y', y'' \dots \frac{dy^{(m-1)}}{dx}, z, z', z'' \dots z^{(p)}\right] = 0, \\ F_1\left[x, y, y', y'' \dots y^{(m)}, z, z', z'' \dots \frac{dz^{(q-1)}}{dx}\right] = 0. \end{cases}$$

On voit par ce qui précède comment on devrait opérer si le système proposé renfermait un plus grand nombre d'équations différentielles.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES SIMULTANÉES. — MÉTHODE DE D'ALEMBERT.

220. Considérons d'abord le cas où l'on a deux équations linéaires du premier ordre entre une variable indépendante x et deux fonctions y, z , de cette variable. Elles seront généralement de la forme

$$\begin{aligned} M \frac{dy}{dx} + N \frac{dz}{dx} + Py + Qz &= V, \\ M' \frac{dy}{dx} + N' \frac{dz}{dx} + P'y + Q'z &= V'; \end{aligned}$$

et si l'on élimine tour à tour $\frac{dy}{dx}$ et $\frac{dz}{dx}$ entre ces équations, on les réduira à celles plus simples

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} + Py + Qz = V, \\ \frac{dz}{dx} + P'y + Q'z = V', \end{cases}$$

dans lesquelles P, Q, V, P', Q', V' désignent des fonctions quelconques de x .

Pour intégrer ces équations on pourrait suivre la méthode d'élimination donnée n° (216), et l'on parviendrait par ce moyen à une équation linéaire du second ordre dans laquelle il ne rentrerait plus que l'une des fonctions inconnues avec la variable x . Mais il est plus simple d'avoir recours au procédé suivant qui est de D'Alembert.

Multiplions l'une des deux équations (1), la seconde, par

exemple, par un facteur indéterminé θ ; puis ajoutons cette équation ainsi multipliée à la première. Nous aurons

$$(2) \quad \frac{dy}{dx} + \theta \frac{dz}{dx} + (P + P'\theta)y + (Q + Q'\theta)z = V + V'\theta.$$

Posons ensuite

$$t = y + \theta z,$$

d'où

$$y = t - \theta z \quad \text{et} \quad \frac{dy}{dx} + \theta \frac{dz}{dx} = \frac{dt}{dx} - z \frac{d\theta}{dx}.$$

Par ces substitutions, l'équation (2) deviendra

$$(3) \quad \frac{dt}{dx} + (P + P'\theta)t - z \left[\frac{d\theta}{dx} + (P + P'\theta)\theta - (Q + Q'\theta) \right] = V + V'\theta;$$

et en égalant à zéro le coefficient de z , on aura

$$(4) \quad \frac{d\theta}{dx} + (P + P'\theta)\theta - (Q + Q'\theta) = 0,$$

$$(5) \quad \frac{dt}{dx} + (P + P'\theta)t - (V + V'\theta) = 0.$$

La première de ces équations ne renferme que les variables θ et x . Elle est du premier ordre, mais non linéaire; et si l'on peut trouver pour θ une valeur qui satisfasse à cette équation, en la substituant dans la seconde, on réduira cette dernière à ne plus contenir que les variables x et t . On obtiendra par suite son intégrale, en appliquant à cette équation la formule du n° (151).

221. Quand les coefficients P , Q , P' , Q' , des équations (4) et (5) sont constants, on peut satisfaire à la première de ces équations en prenant pour θ un nombre constant. Alors, on a $d\theta = 0$, et, par suite,

$$(6) \quad (P + P'\theta)\theta - (Q + Q'\theta) = 0$$

équation du second degré dont nous désignerons les deux racines par θ_1 et θ_2 .

Cela posé, en appliquant à l'équation (5) la formule du n° (151), on a

$$(7) \quad t = e^{-(P+P'\theta)x} \left[c + \int (V + V'\theta) e^{(P+P'\theta)x} dt \right].$$

Mettant dans cette expression à la place de θ les deux valeurs θ_1 et θ_2 qui satisfont à l'équation (6), et remplaçant t par $y + \theta z$, on aura donc

$$y + \theta_1 z = e^{-(P+P'\theta_1)x} \left[c_1 + \int (V + V'\theta_1) e^{(P+P'\theta_1)x} dt \right],$$

$$y + \theta_2 z = e^{-(P+P'\theta_2)x} \left[c_2 + \int (V + V'\theta_2) e^{(P+P'\theta_2)x} dt \right],$$

équations au moyen desquelles on pourra déterminer y et z .

222. Si les racines de l'équation (6) étaient imaginaires et représentées par $\pm \alpha + \epsilon \sqrt{-1}$, alors l'équation (4), à laquelle θ doit satisfaire, pourrait être mise sous la forme

$$\frac{d\theta}{dx} + P'[(\theta - \alpha)^2 + \epsilon^2] = 0,$$

ou

$$\frac{d\theta}{(\theta - \alpha)^2 + \epsilon^2} + P' dx = 0,$$

équation dont l'intégrale générale est

$$\frac{1}{\epsilon} \arctan \frac{\theta - \alpha}{\epsilon} = c - P'x,$$

d'où

$$\theta = \alpha + \epsilon \tan \epsilon(c - P'x),$$

c désignant une constante arbitraire.

En donnant à la constante c deux valeurs particulières quelconques; en prenant, par exemple, $\epsilon c = 0$ et $\epsilon c = \frac{\pi}{2}$, on aura

$$\theta = \alpha - \epsilon \tan \epsilon P'x, \quad \theta = \alpha + \epsilon \cot \epsilon P'x;$$

et ces valeurs substituées dans l'équation (7) donneront deux équations au moyen desquelles on pourra déterminer les expressions de chacune des variables y et z en fonction de x .

223. Si les racines de l'équation (6) étaient égales et représentées par α , l'équation (4) pourrait se mettre sous la forme

$$\frac{d\theta}{dx} + P'(\theta - \alpha)^2 = 0$$

ou

$$\frac{d\theta}{(\theta - \alpha)^2} + P'dx = 0,$$

équation dont l'intégrale est :

$$\frac{1}{\theta - \alpha} = c + P'x,$$

d'où

$$\theta = \alpha + \frac{1}{P'x + c},$$

c désignant toujours une constante arbitraire.

En donnant à la constante c deux valeurs particulières quelconques, celles $c = \infty$ et $c = 0$, par exemple, on a

$$\theta = \alpha, \quad \theta = \alpha + \frac{1}{P'x};$$

et ces valeurs substituées successivement dans l'équation (7) donneront deux équations d'où l'on pourra déduire y et z en fonction de x .

224. La même méthode s'applique sans difficulté au cas d'un plus grand nombre de variables et d'équations différentielles. Considérons, par exemple, le cas où l'on a trois équations entre les quatre variables x, y, z, u , et auxquelles on peut toujours donner la forme

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} + Py + Qz + Ru = V, \\ \frac{dz}{dx} + P'y + Q'z + R'u = V', \\ \frac{du}{dx} + P''y + Q''z + R''u = V'', \end{cases}$$

Multiplions la seconde par θ , la troisième par θ' ; puis ajoutons les deux produits à la première. Nous aurons

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} + \theta \frac{dz}{dx} + \theta' \frac{du}{dx} + (P + P'\theta + P''\theta')y + (Q + Q'\theta + Q''\theta')z \\ \quad + (R + R'\theta + R''\theta')u = V + V'\theta + V''\theta'. \end{cases}$$

Posons

$$t = y + \theta z + \theta' u;$$

d'où

$$y = t - \theta z - \theta' u \text{ et } \frac{dy}{dx} + \theta \frac{dz}{dx} + \theta' \frac{du}{dx} = \frac{dt}{dx} - z \frac{d\theta}{dx} - u \frac{d\theta'}{dx}.$$

L'équation (2) deviendra par ces substitutions

$$(3) \quad \begin{cases} \frac{dt}{dx} + (P + P'\theta + P''\theta')t - z \left[\frac{d\theta}{dx} + (P + P'\theta + P''\theta')\theta - (Q + Q'\theta + Q''\theta') \right] \\ \quad - u \left[\frac{d\theta'}{dx} + (P + P'\theta + P''\theta')\theta' - (R + R'\theta + R''\theta') \right] \\ \quad = V + V'\theta + V''\theta'; \end{cases}$$

et en égalant à zéro les coefficients de z et u , on réduira cette équation aux suivantes :

$$(4) \quad \frac{d\theta}{dx} + (P + P'\theta + P''\theta')\theta - (Q + Q'\theta + Q''\theta') = 0,$$

$$(5) \quad \frac{d\theta'}{dx} + (P + P'\theta + P''\theta')\theta' - (R + R'\theta + R''\theta') = 0,$$

$$(6) \quad \frac{dt}{dx} + (P + P'\theta + P''\theta')t - (V + V'\theta + V''\theta') = 0.$$

Les deux premières ne renferment que θ et θ' ; elles sont

du premier ordre, mais non linéaire; et si l'on peut trouver pour ces variables des valeurs qui y satisfassent, en substituant ces valeurs dans la troisième, on réduira cette équation qui est linéaire, à ne plus contenir que les variables x et t . Cette équation s'intégrera par suite au moyen de la formule du n° (151). *

225. Dans le cas où les coefficients $P, Q, R; P', Q', R'; P'', Q'', R''$, sont constants, les équations (4) et (5) sont satisfaites par des valeurs constantes de θ et θ' , valeurs qui sont déterminées par les équations,

$$(7) \quad (P + P'\theta + P''\theta^2)\theta - (Q + Q'\theta + Q''\theta^2) = 0,$$

$$(8) \quad (P + P'\theta + P''\theta^2)\theta' - (R + R'\theta + R''\theta^2) = 0.$$

Ces équations conduisent à des équations finales où θ et θ' monteront au troisième degré, en sorte que l'on aura trois systèmes de valeurs que nous représenterons par $\theta, \theta'; \theta_1, \theta'_1; \theta_2, \theta'_2$. En substituant ces valeurs dans l'intégrale de l'équation (4), qui est

$$t = e^{-(P+P'\theta+P''\theta^2)x} \left[c + \int (R + R'\theta + R''\theta^2) e^{(P+P'\theta+P''\theta^2)x} dx \right],$$

et remplaçant t par son expression en y, z, u , on aura

$$y + \theta_1 z + \theta'_1 u = e^{(P+P'\theta_1+P''\theta_1^2)x} \left[c_1 + \int (R + R'\theta_1 + R''\theta_1^2) e^{-(P+P'\theta_1+P''\theta_1^2)x} dx \right]$$

$$y + \theta_2 z + \theta'_2 u = e^{(P+P'\theta_2+P''\theta_2^2)x} \left[c_2 + \int (R + R'\theta_2 + R''\theta_2^2) e^{-(P+P'\theta_2+P''\theta_2^2)x} dx \right]$$

$$y + \theta_3 z + \theta'_3 u = e^{(P+P'\theta_3+P''\theta_3^2)x} \left[c_3 + \int (R + R'\theta_3 + R''\theta_3^2) e^{-(P+P'\theta_3+P''\theta_3^2)x} dx \right]$$

équations d'où il sera facile de tirer les valeurs de y, z, u , en fonction de x , qu'elles déterminent.

Ainsi, dans le cas où les coefficients sont constants, les équations proposées (1) s'intègrent généralement.

Nous avons supposé, dans ce qui précède, que les équations données étaient du premier ordre. Mais si ces équations étaient d'ordre supérieur au premier, on les ramènerait à cet ordre, d'après ce qui a été dit au n° (219).

INTÉGRATION D'UN SYSTÈME D'ÉQUATIONS POURVUES DE SECONDS MEMBRES, DANS LE CAS OU L'ON CONNAÎT LES INTÉGRALES DES MÊMES ÉQUATIONS SANS SECONDS MEMBRES.

226. Prenons, par exemple, le système des trois équations

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} + Py + Qz + Ru = V \\ \frac{dz}{dx} + P'y + Q'z + R'u = V' \\ \frac{du}{dx} + P''y + Q''z + R''u = V'' \end{cases}$$

dans lesquelles P, Q, R, etc., désignent toujours des fonctions données de x . Je dis que si l'on connaît trois systèmes de fonctions satisfaisant aux équations sans seconds membres

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} + Py + Qz + Ru = 0, \\ \frac{dz}{dx} + P'y + Q'z + R'u = 0, \\ \frac{du}{dx} + P''y + Q''z + R''u = 0, \end{cases}$$

on pourra facilement en conclure les intégrales des équations (1), pourvues de seconds membres; et, cela, par de simples quadratures.

En effet, soient

$$y_1, z_1, u_1; y_2, z_2, u_2; y_3, z_3, u_3$$

les trois systèmes d'intégrales particulières satisfaisant aux équations privées de seconds membres (2). Il est clair que les équations

$$(3) \quad \begin{cases} y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 \\ z = C_1 z_1 + C_2 z_2 + C_3 z_3 \\ u = C_1 u_1 + C_2 u_2 + C_3 u_3 \end{cases}$$

y satisferont également; et si l'on regarde les arbitraires C_1, C_2, C_3 , non plus comme des constantes, mais comme des fonctions de x , on pourra considérer les équations (3) comme représentant les intégrales du système (1).

Cela posé, si l'on substitue les valeurs (3) dans les équations (1), on aura, après avoir supprimé les termes qui sont nuls par hypothèse,

$$(4) \quad \begin{cases} y_1 \frac{dC_1}{dx} + y_2 \frac{dC_2}{dx} + y_3 \frac{dC_3}{dx} = V, \\ z_1 \frac{dC_1}{dx} + z_2 \frac{dC_2}{dx} + z_3 \frac{dC_3}{dx} = V', \\ u_1 \frac{dC_1}{dx} + u_2 \frac{dC_2}{dx} + u_3 \frac{dC_3}{dx} = V'', \end{cases}$$

équations d'où l'on tire

$$\frac{dC_1}{dx} = X_1, \quad \frac{dC_2}{dx} = X_2, \quad \frac{dC_3}{dx} = X_3,$$

X_1, X_2, X_3 , étant des fonctions de x . En intégrant, on aura donc

$$C_1 = \int X_1 dx + a_1,$$

$$C_2 = \int X_2 dx + a_2,$$

$$C_3 = \int X_3 dx + a_3,$$

valeurs qui substituées dans les équations (3) donneront les intégrales générales du système (1).

227. *Cas où les coefficients sont constants.* — Lorsque les coefficients sont constants, on peut, au lieu de la méthode de D'Alembert, se servir du procédé que nous avons employé pour le cas d'une seule équation différentielle.

Reprenons, par exemple, le système des trois équations

$$(1) \quad \begin{cases} \frac{dy}{dx} + Py + Qz + Ru = 0, \\ \frac{dz}{dx} + P'y + Q'z + R'u = 0, \\ \frac{du}{dx} + P''y + Q''z + R''u = 0, \end{cases}$$

dans lesquelles nous supposerons maintenant que les coefficients $P, Q, R, P', Q', R', \dots$ soient des nombres constants.

En posant

$$(2) \quad y = e^{-\rho x}, \quad z = \lambda e^{-\rho x}, \quad u = \mu e^{-\rho x},$$

et substituant ces valeurs dans les équations (1), on aura

$$(3) \quad \begin{cases} (P - \rho) + Q\lambda + R\mu = 0 \\ P' + (Q' - \rho)\lambda + R'\mu = 0 \\ P'' + Q''\lambda + (R'' - \rho)\mu = 0; \end{cases}$$

et si entre ces trois équations, on élimine les indéterminées λ et μ , on sera conduit à une équation du troisième degré en ρ , savoir :

$$(\rho - P)(\rho - Q)(\rho - R'') - R'Q''(\rho - P) - RP''(\rho - Q) - QP'(\rho - R'') - QR'P'' - RP'Q'' = 0.$$

Désignons par ρ_1, ρ_2, ρ_3 , les trois racines de cette équation, et par $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \mu_1, \mu_2, \mu_3$, les valeurs correspondantes de λ et μ . Les équations (1) seront satisfaites par chacun des systèmes particuliers.

$$y = C_1 e^{-\rho_1 x}, \quad z = C_1 \lambda_1 e^{-\rho_1 x}, \quad u = C_1 \mu_1 e^{-\rho_1 x}$$

$$y = C_2 e^{-\rho_2 x}, \quad z = C_2 \lambda_2 e^{-\rho_2 x}, \quad u = C_2 \mu_2 e^{-\rho_2 x}$$

$$y = C_3 e^{-\rho_3 x}, \quad z = C_3 \lambda_3 e^{-\rho_3 x}, \quad u = C_3 \mu_3 e^{-\rho_3 x}$$

et l'on aura la solution générale de la question proposée en posant

$$(4) \quad \begin{cases} y = C_1 e^{-p_1 x} + C_2 e^{-p_2 x} + C_3 e^{-p_3 x} \\ z = C_1 \lambda_1 e^{-p_1 x} + C_2 \lambda_2 e^{-p_2 x} + C_3 \lambda_3 e^{-p_3 x} \\ u = C_1 \mu_1 e^{-p_1 x} + C_2 \mu_2 e^{-p_2 x} + C_3 \mu_3 e^{-p_3 x}. \end{cases}$$

C_1, C_2, C_3 , étant des constantes arbitraires.

On devrait modifier, comme on le sait, la forme de ces intégrales, si l'équation en p avait des racines égales.

EXERCICES.

1° Soit les deux équations

$$\begin{aligned} 4 \frac{dy}{dx} + 9 \frac{dz}{dx} + 44y + 49z &= x \\ 3 \frac{dy}{dx} + 7 \frac{dz}{dx} + 34y + 38z &= e^x, \end{aligned}$$

On trouvera pour les intégrales générales

$$\begin{aligned} y &= \frac{19}{3} x + \frac{56}{9} - \frac{29}{7} e^x + \frac{c}{5} e^{-4x} + \frac{c_1}{5} e^{-x}, \\ z &= -\frac{17}{3} x + \frac{55}{9} + \frac{24}{7} e^x + \frac{4c}{5} e^{-4x} - \frac{c_1}{5} e^{-x}. \end{aligned}$$

2° Soient

$$\begin{aligned} 4 \frac{dy}{dx} + 9 \frac{dz}{dx} + 11y + 31z &= e^x, \\ 3 \frac{dy}{dx} + 7 \frac{dz}{dx} + 8y + 24z &= e^{2x}. \end{aligned}$$

On aura

$$\begin{aligned} y &= \frac{31}{25} e^x - \frac{49}{36} e^{2x} - c_1 x e^{-4x} + c_2 e^{-4x} \\ z &= \frac{19}{36} e^{2x} - \frac{11}{25} e^x + \frac{c_1(x+1) - c_2}{e^{4x}}. \end{aligned}$$

CHAPITRE XI.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES.

DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES QUI S'INTÈGRENT COMME LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES.

228. On nomme *équations aux dérivées partielles*, celles qui établissent des relations entre une ou plusieurs fonctions inconnues, les variables dont dépendent ces fonctions et quelques-unes de leurs dérivées partielles. Généralement on suppose que ces équations sont en nombre égal à celui des inconnues. Mais ce qui va suivre est borné au cas où l'on donne seulement une équation et une seule fonction inconnue.

Nous regarderons une pareille équation comme résolue, toutes les fois que nous aurons ramené sa solution à ne plus dépendre que de l'intégration d'un système d'équations différentielles ordinaires. Parmi les équations susceptibles de se réduire ainsi, nous distinguerons tout d'abord celles dans lesquelles les dérivées partielles qui y figurent ne sont relatives qu'à une seule variable. On peut alors opérer comme si l'on avait une équation différentielle ordinaire, mais après l'intégration, il faudra remplacer les constantes par des fonctions arbitraires des variables que l'on aura regardées comme constantes.

Multipliant de nouveau par dx et intégrant, on aura

$$z = \int \left[\int F(x, y) dx + \varphi(y) \right] dy + \psi(y),$$

$\psi(y)$ étant une autre fonction arbitraire introduite par la seconde intégration.

On trouverait de même pour

$$\begin{aligned} \frac{d^2 z}{dy^2} &= F(x, y) \\ z &= \int \left[\int F(x, y) dy + \varphi(x) \right] dx + \psi(x). \end{aligned}$$

Dans le cas particulier où

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = ax - y^2,$$

on a

$$\frac{dz}{dx} = \frac{ax^2}{2} - y^2 x + \varphi(y);$$

et, par suite,

$$z = \frac{ax^3}{6} - \frac{y^2 x^2}{2} + x\varphi(y) + \psi(y).$$

230. Considérons enfin l'équation

$$(1) \quad \frac{d^2 z}{dx^2} + P \frac{dz}{dx} = Q$$

où P et Q désignent des fonctions de x et de y . En posant

$$(2) \quad \frac{dz}{dx} = p,$$

on ramène cette équation à celle

$$(3) \quad \frac{dp}{dx} + Pp = Q$$

qui rentre immédiatement dans la classe des équations linéaires étudiées n° (151).

En comparant cette équation avec celle (1) n° (151), on a donc

$$p = e^{\int P dx} \left[\int Q e^{\int P dx} dx + C \right],$$

et en remplaçant la constante C par une fonction arbitraire de y

$$p = e^{\int P dx} \left[\int Q e^{\int P dx} dx + \varphi(y) \right].$$

Portant cette valeur de p dans l'équation (2), multipliant par dx et intégrant, on a enfin

$$z = \int \left[e^{\int P dx} \left(\int Q e^{\int P dx} dx + \varphi(y) \right) \right] dx + \psi(y),$$

intégrale qui est celle cherchée.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES DU PREMIER ORDRE ET DU PREMIER DEGRÉ.

231. Considérons maintenant l'équation

$$(1) \quad P \frac{dz}{dx} + Q \frac{dz}{dy} = R \quad \text{ou} \quad Pp + Qq = R,$$

la plus générale du premier ordre et du premier degré, P , Q et R étant des fonctions données de x, y, z . Posons

$$dz = p dx + q dy,$$

équation qui exprime que p et q sont les dérivées partielles de z par rapport à x et à y . En éliminant p de cette équation pour la porter dans celle (1), on fera prendre à cette équation la forme

$$(2) \quad Pdz - Rdx = q(Pdy - Qdx);$$

et il s'agira d'intégrer cette dernière, q restant indéterminé.
Soient

$$(3) \quad u = c, \quad v = c'$$

les intégrales des équations différentielles simultanées

$$(4) \quad Pdz - Rdx = 0, \quad Pdy - Qdx = 0,$$

u et v étant des fonctions données de x, y, z , c et c' des constantes; et formons l'équation

$$(5) \quad u = \varphi(v)$$

φ désignant une fonction arbitraire. Comme par hypothèse $u = c$, $v = c'$ satisfont aux équations simultanées (4), il faudra que leurs différentielles aient lieu en même temps que ces dernières; si donc dans les équations

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz = 0, \\ \frac{dv}{dx} dx + \frac{dv}{dy} dy + \frac{dv}{dz} dz = 0, \end{cases}$$

on met à la place de dy et de dx les valeurs de ces différentielles tirées des équations (4), on devra avoir les résultats identiquement nuls

$$(7) \quad \begin{cases} P \frac{du}{dx} + Q \frac{du}{dy} + R \frac{du}{dz} = 0, \\ P \frac{dv}{dx} + Q \frac{dv}{dy} + R \frac{dv}{dz} = 0, \end{cases}$$

Mais l'équation $u = \varphi(v)$ étant différentiée donne $du = \varphi'(v)dv$
ou

$$\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz = \varphi'(v) \left(\frac{dv}{dx} dx + \frac{dv}{dy} dy + \frac{dv}{dz} dz \right);$$

et si l'on substitue dans cette équation pour $\frac{du}{dx}$, $\frac{dv}{dx}$ leurs valeurs tirées des équations (7), savoir :

$$\frac{du}{dx} = -\frac{du}{dy} \frac{Q}{P} - \frac{du}{dz} \frac{R}{P},$$

$$\frac{dv}{dx} = -\frac{dv}{dy} \frac{Q}{P} - \frac{dv}{dz} \frac{R}{P},$$

on aura

$$\begin{aligned} & \frac{du}{dy} (Pdy - Qdx) + \frac{du}{dz} (Pdz - Rdx) \\ &= \varphi'(v) \left[\frac{dv}{dy} (Pdy - Qdx) + \frac{dv}{dz} (Pdz - Rdx) \right]. \end{aligned}$$

On tire de cette dernière, en la résolvant par rapport à $Pdz - Rdx$, et représentant par Φ un coefficient fonction de $\varphi'(v)$ et par conséquent indéterminé comme q :

$$Pdz - Rdx = \Phi(Pdy - Qdx)$$

équation de même forme que celle (2). D'où l'on conclut que si :

$$u = c, \quad v = c'$$

sont les intégrales des équations différentielles simultanées

$$Pdz - Rdx = 0, \quad Pdy - Qdx = 0,$$

l'intégrale de la proposée

$$Pp + Qq = R$$

sera

$$u = \varphi(v),$$

φ désignant une fonction arbitraire.

232. La même méthode s'applique sans difficulté au cas où l'équation aux dérivées partielles renferme un plus grand nombre de variables. Considérons, par exemple, le cas où la fonction cherchée dépend de quatre variables, et soit

$$P \frac{dz}{dx} + Q \frac{dz}{dy} + R \frac{dz}{dt} = S$$

ou

(1)

$$Pp + Qq + Rr = S$$

l'équation donnée, P, Q, R, S étant des fonctions quelconques de x, y, z, t et p, q, r les dérivées partielles de z par rapport à x, y, t , savoir :

$$p = \frac{dz}{dx}, \quad q = \frac{dz}{dy}, \quad r = \frac{dz}{dt}.$$

En joignant à cette équation celle

$$dz = p dx + q dy + r dt$$

qui lui sert de définition, et éliminant r de cette équation pour la porter dans celle (1), on aura

$$(2) \quad Pdz - sdt = p(Pdx - Qdt) + q(Pdy - Rdt),$$

équation à laquelle il s'agit de satisfaire de la manière la plus générale, p et q restant indéterminés.

Soient

$$u = c, \quad v = c', \quad w = c'',$$

les intégrales, résolues par rapport aux constantes, des équations différentielles simultanées

$$(3) \quad Pdz - Sdt = 0, \quad Pdx - Qdt = 0, \quad Pdy - Rdt = 0.$$

Il s'agit de prouver ici, comme au n° (251), que l'équation

$$(4) \quad u = \varphi(v, w)$$

dans laquelle φ désigne une fonction arbitraire, satisfait à la proposée

$$Pp + Qq + Rr = S,$$

ou en est l'intégrale générale.

Or, puisque les équations $u = c, v = c', w = c''$ satisfont aux équations (3), il faudra que leurs différentielles aient lieu en même temps que ces dernières, ou que l'on ait identiquement

$$(5) \quad \begin{cases} P \frac{du}{dx} + Q \frac{du}{dy} + R \frac{du}{dz} + S \frac{du}{dt} = 0, \\ P \frac{dv}{dx} + Q \frac{dv}{dy} + R \frac{dv}{dz} + S \frac{dv}{dt} = 0, \\ P \frac{dw}{dx} + Q \frac{dw}{dy} + R \frac{dw}{dz} + S \frac{dw}{dt} = 0. \end{cases}$$

Cela posé, l'équation $u = \varphi(v, w)$ étant différenciée donne $du = \varphi'(v, w) dv + \varphi''(v, w) dw$, ou en développant

$$\begin{aligned} & \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz + \frac{du}{dt} dt \\ &= \varphi'(v, w) \left(\frac{dv}{dx} dx + \frac{dv}{dy} dy + \frac{dv}{dz} dz + \frac{dv}{dt} dt \right) \\ &+ \varphi''(v, w) \left(\frac{dw}{dx} dx + \frac{dw}{dy} dy + \frac{dw}{dz} dz + \frac{dw}{dt} dt \right); \end{aligned}$$

et si, dans cette équation, on substitue pour $\frac{du}{dt}$, $\frac{dv}{dt}$, $\frac{dw}{dt}$ leurs valeurs tirées des équations (5), savoir :

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= -\frac{P}{S} \frac{du}{dx} - \frac{Q}{S} \frac{du}{dy} - \frac{R}{S} \frac{du}{dz}, \\ \frac{dv}{dt} &= -\frac{P}{S} \frac{dv}{dx} - \frac{Q}{S} \frac{dv}{dy} - \frac{R}{S} \frac{dv}{dz}, \\ \frac{dw}{dt} &= -\frac{P}{S} \frac{dw}{dx} - \frac{Q}{S} \frac{dw}{dy} - \frac{R}{S} \frac{dw}{dz}, \end{aligned}$$

on aura

$$\begin{aligned} & \frac{du}{dx} (Pdx - Qdt) + \frac{du}{dy} (Pdy - Rdt) + \frac{du}{dz} (Pdz - Sdt) \\ &= \varphi'(v, w) \left[\frac{dv}{dx} (Pdx - Qdt) + \frac{dv}{dy} (Pdy - Rdt) + \frac{dv}{dz} (Pdz - Sdt) \right] \\ &+ \varphi''(v, w) \left[\frac{dw}{dx} (Pdx - Qdt) + \frac{dw}{dy} (Pdy - Rdt) + \frac{dw}{dz} (Pdz - Sdt) \right]. \end{aligned}$$

Résolvant cette équation par rapport à $Pdz - Sdt$ et représentant par Φ et Ψ deux coefficients fonctions de $\varphi'(v, w)$ et $\varphi''(v, w)$, et par conséquent indéterminés comme p et q , il viendra

$$Pdz - Sdt = \Phi(Pdx - Qdt) + \Psi(Pdy - Rdt),$$

équation de même forme que celle (2). D'où l'on conclut que si

$$u = c, \quad v = c', \quad w = c''$$

sont les intégrales du système d'équations simultanées

$$Pdz - Sdt = 0, \quad Pdx - Qdt = 0, \quad Pdy - Rdt = 0,$$

système que l'on peut écrire sous la forme abrégée

$$\frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{R} = \frac{dt}{S},$$

l'intégrale de l'équation proposée

$$Pp + Qq + Rr = S$$

sera

$$u = \varphi(v, w),$$

φ désignant une fonction tout à fait arbitraire.

APPLICATION DE LA THÉORIE QUI PRÉCÈDE A L'INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DIFFÉRENTIELLES PARTIELLES DES DIVERSES CLASSES DE SURFACES.

233. *Surfaces cylindriques.* — L'équation aux différentielles partielles des surfaces cylindriques est

$$(1) \quad a \frac{dz}{dx} + b \frac{dz}{dy} = 1.$$

Pour intégrer cette équation, posons, conformément à ce qui vient d'être dit, les équations simultanées

$$\frac{dx}{a} = \frac{dy}{b} = \frac{dz}{1},$$

ou

$$dx = a dz, \quad dy = b dz,$$

Nous aurons, en intégrant

$$x = az + c, \quad y = bz + c_1,$$

et en résolvant par rapport à c et c_1 ,

$$x - az = c, \quad y - bz = c_1.$$

Pour l'intégrale générale de l'équation proposée (1), nous aurons donc

$$\varphi(x - az, \quad y - bz) = 0,$$

ou

$$(2) \quad x - az = \psi(y - bz),$$

équation qui est bien celle, en quantités finies, des surfaces cylindriques.

234. La fonction arbitraire ψ qui entre dans l'intégrale générale (2) peut être déterminée par diverses conditions.

Si l'on veut, par exemple, que la surface passe par une courbe donnée dont

$$(1) \quad F(x, y, z) = 0, \quad F_1(x, y, z) = 0$$

sont les équations, il faudra, pour que tous les points de cette courbe soient situés sur la surface, que ces équations et celles

$$(2) \quad x + ua = \alpha, \quad y - bz = \beta$$

de la génératrice soient satisfaites par les mêmes valeurs de x, y, z . Or, en éliminant x, y, z entre ces équations (1) et (2), on obtiendra une équation entre α et β , $\varphi(\alpha, \beta) = 0$, d'où résultera $\beta = \psi(\alpha)$; et cette équation déterminera complètement

la fonction ψ . Pour l'équation de la surface cylindrique, on aura donc

$$x - az = \psi(y - bz).$$

Si la surface cylindrique doit être tangente à une surface courbe donnée dont

$$(1) \quad F(x, y, z) = 0$$

est l'équation, on commencera par chercher à déterminer la courbe de contact des deux surfaces; or l'une des deux équations qui représentent cette courbe étant $F(x, y, z) = 0$, on obtiendra la seconde en remarquant que la surface cylindrique et celle donnée (1) ont, en tous les points de la courbe de contact, le même plan tangent; en sorte que les valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$ tirées de l'équation $F(x, y, z) = 0$ devront, pour tous les points dont il s'agit, satisfaire à l'équation différentielle de la surface cylindrique. Si donc, on prend dans l'équation $F(x, y, z) = 0$ les valeurs de $\frac{dz}{dx}$ et $\frac{dz}{dy}$, et qu'on porte ces valeurs dans l'équation

$$a \frac{dz}{dx} + b \frac{dz}{dy} = 1,$$

on obtiendra la seconde des équations de la courbe de contact. Soit $F_1(x, y, z) = 0$ cette équation: on connaîtra ainsi deux équations

$$F(x, y, z) = 0, \quad F_1(x, y, z) = 0$$

de la courbe par laquelle doit passer la surface cylindrique, et, par suite, le problème sera ramené au précédent.

235. *Surfaces coniques.* — L'équation aux différentielles partielles qu'il s'agit d'intégrer est la suivante :

$$(z - \gamma) = (x - \alpha) \frac{dz}{dx} + (y - \beta) \frac{dz}{dy}.$$

A cet effet, posons

$$\frac{dx}{x-a} = \frac{dy}{y-b} = \frac{dz}{z-\gamma};$$

nous aurons, en intégrant

$$\begin{aligned} l(x-a) &= l(z-\gamma) + lc, \\ l(y-b) &= l(z-\gamma) + lc_1, \end{aligned}$$

et, en résolvant par rapport aux constantes c, c_1 ,

$$\frac{x-a}{z-\gamma} = c, \quad \frac{y-b}{z-\gamma} = c_1.$$

Établissant entre ces valeurs une relation arbitraire, nous aurons donc, pour l'intégrale générale de l'équation proposée,

$$\varphi\left(\frac{x-a}{z-\gamma}, \frac{y-b}{z-\gamma}\right) = 0,$$

ou

$$\frac{x-a}{z-\gamma} = \psi\left(\frac{y-b}{z-\gamma}\right),$$

ce qui est bien l'équation du n° (204), tome I.

On agirait comme dans les deux cas qui précèdent, si la fonction arbitraire ψ qui entre dans cette équation, devait être déterminée par la condition de passer par une courbe dont les équations sont données, ou par celle d'être tangente à une surface courbe également donnée.

236. *Surfaces conoïdes.* — Leur équation aux différentielles partielles est :

$$x \frac{dz}{dx} + y \frac{dz}{dy} = 0.$$

Pour intégrer cette équation, on commencera par intégrer celles

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y}, \quad dz = 0,$$

et l'on aura

$$z = \alpha, \quad y = 6x,$$

α et 6 étant deux constantes. Pour l'intégrale générale de l'équation proposée, on aura donc

$$\varphi\left(z, \frac{y}{z}\right) = 0,$$

ou si l'on veut

$$z = \psi\left(\frac{y}{z}\right).$$

ψ étant une fonction arbitraire de x et y que l'on pourra déterminer par la condition que la surface conoïde passe par une courbe dont les équations sont données, ou par celle d'être tangente à une surface également donnée.

237. *Surfaces de révolution.* — L'équation que nous avons à intégrer est la suivante :

$$(y - 6z) \frac{dz}{dx} - (x - az) \frac{dz}{dy} = bx - ay.$$

Pour y parvenir, nous commencerons d'abord par intégrer le système des équations simultanées :

$$\frac{dx}{y - bz} = \frac{-dy}{x - az} = \frac{dz}{bx - ay},$$

système qui revient au suivant :

$$\begin{aligned} (bx - ay)dx &= (y - bz)dz, \\ - (bx - ay)dy &= (x - az)dz. \end{aligned}$$

Or, si l'on multiplie ces équations respectivement par a et b , et qu'on retranche la première de la seconde, on aura

$$adx + bdy = -dz,$$

d'où

$$ax + by + z = c.$$

Multipliant ensuite les mêmes équations respectivement par x et y , puis les retranchant, on trouvera

$$xdx + ydy + zdz = 0,$$

d'où

$$x^2 + y^2 + z^2 = c_1.$$

Pour l'intégrale générale de l'équation proposée, on aura donc

$$\varphi(x^2 + y^2 + z^2, ax + by + z) = 0,$$

ou

$$x^2 + y^2 + z^2 = \psi(ax + by + z),$$

ψ étant une fonction arbitraire que l'on déterminera d'après la condition que la surface passe par une courbe donnée ou soit tangente à une surface également donnée.

EXERCICES.

1° Soit

$$x \frac{dz}{dy} + y \frac{dz}{dy} = \frac{xy}{z}.$$

On a

$$\frac{dx}{x} = \frac{dy}{y} = \frac{zdz}{xy},$$

d'où

$$y = cx, \quad z^2 = cx^2 + c_1,$$

et, par suite,

$$z^2 = xy + \psi\left(\frac{y}{x}\right).$$

2° Soit

$$(y + x) \frac{dz}{dx} + (y - x) \frac{dz}{dy} = z.$$

On a

$$\frac{dx}{y+x} = \frac{dy}{y-x} = \frac{dz}{z}.$$

La première équation peut s'écrire sous la forme :

$$xdy - ydx + xdx + ydy = 0,$$

et, en employant les coordonnées polaires, on trouve pour son intégrale

$$\text{arc tang } \frac{x}{y} - l(x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} = c.$$

On a d'ailleurs

$$\frac{dz}{z} = \frac{xdx + ydy}{x^2 + y^2},$$

d'où

$$z = c_1 (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Pour l'intégrale générale cherchée, on a donc

$$z = (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \psi \left[\text{arc tang } \frac{x}{y} - \log (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \right].$$

3° Soit

$$\frac{dz}{dx} - a \frac{dz}{dy} = e^{mx} \cos py.$$

On a

$$\frac{dx}{1} = -\frac{dy}{a} = \frac{dz}{e^{mx} \cos py},$$

d'où

$$\begin{aligned} y + ax = c, \quad z &= e^{mx} \frac{m \cos p(c - ax) - ap \sin p(c - ax)}{m^2 + a^2 p^2} + c_1 \\ &= \frac{e^{mx} m \cos py - ap \sin py}{m^2 + a^2 p^2} + c_1, \end{aligned}$$

et, par conséquent,

$$z = e^{mx} \frac{m \cos py - ap \sin py}{m^2 + a^2 p^2} + \psi(y + ax).$$

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES
DES ORDRES SUPÉRIEURS.

238. La méthode que nous avons suivie dans l'intégration des équations aux dérivées partielles du premier ordre et du premier degré peut également s'étendre aux équations d'ordres supérieurs, mais dans lesquelles les dérivées ne passent pas le premier degré. Nous prendrons, pour en donner un exemple, l'équation linéaire du second ordre à trois variables dont la forme générale est

$$R \frac{d^2 z}{dx^2} + S \frac{d^2 z}{dx dy} + T \frac{d^2 z}{dy^2} = V,$$

ou

$$(1) \quad Rr + Ss + Tt = V,$$

R, S, T et V étant des fonctions données de x, y, z, p et q .

En joignant à cette équation celles

$$dz = p dx + q dy, \quad dp = r dx + s dy, \quad dq = s dx + t dy,$$

et éliminant des deux dernières les valeurs de v et t pour les substituer dans celles (1), on aura

$$(2) \quad R dp dy + T dq dx - V dx dy = s(R dy^2 - S dx dy + T dx^2),$$

et ici, comme au n° (231), il s'agira de prouver que si

$$u = c, \quad v = c'$$

sont deux fonctions satisfaisant en même temps aux équations

$$(3) \quad \begin{cases} R dp dy + T dq dz - V dx dy = 0, \\ R dy^2 - S dx dy + T dx^2 = 0, \end{cases}$$

la proposée (1) sera satisfaite par la relation

$$(4) \quad u = \varphi(v).$$

Or, la seconde des équations (5) étant du second degré par rapport à dx et à dy , se décomposera en deux autres de la forme

$$dy - \Theta dx = 0, \quad dy - \Theta' dx = 0,$$

Θ et Θ' étant les racines de l'équation

$$(5) \quad R\Theta^2 - S\Theta + T = 0,$$

et si l'on met successivement ces valeurs de dy dans la première des équations (5), on pourra remplacer le système (5) par l'un ou par l'autre des systèmes suivants :

$$(6) \quad R\Theta dp + Tdq - V\Theta dx = 0, \quad dy - \Theta dx = 0,$$

$$(7) \quad R\Theta' dp + Tdq - V\Theta' dx = 0, \quad dy - \Theta' dx = 0.$$

Cela posé, en différentiant les équations $u = c$ et $v = c'$ qui sont supposées satisfaire aux équations (6), on aura

$$\frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz + \frac{du}{dp} dp + \frac{du}{dq} dq = 0,$$

$$\frac{dv}{dx} dx + \frac{dv}{dy} dy + \frac{dv}{dz} dz + \frac{dv}{dp} dp + \frac{dv}{dq} dq = 0,$$

et si dans ces équations on met à la place de dz sa valeur $pdx + qdy$, et qu'on remplace dy et dq par leurs valeurs tirées des équations (6), on aura deux équations qui se partageront, à cause de l'indépendance de dx et dp , dans les quatre suivantes :

$$\frac{du}{dx} + \Theta \frac{du}{dy} + (p + q\Theta) \frac{du}{dz} + \frac{V\Theta}{T} \frac{du}{dq} = 0,$$

$$\frac{dv}{dx} + \Theta \frac{dv}{dy} + (p + q\Theta) \frac{dv}{dz} + \frac{V\Theta}{T} \frac{dv}{dq} = 0,$$

$$\frac{du}{dp} - \frac{R\Theta}{T} \frac{du}{dq} = 0, \quad \frac{dv}{dp} - \frac{R\Theta}{T} \frac{dv}{dq} = 0.$$

D'ailleurs, l'équation $u = \varphi(v)$ étant différenciée donne $du = \varphi'(v) dv$, ou, en développant,

$$\begin{aligned} & \frac{du}{dx} dx + \frac{du}{dy} dy + \frac{du}{dz} dz + \frac{du}{dp} dp + \frac{du}{dq} dq \\ &= \varphi'(v) \left[\frac{dv}{dx} dx + \frac{dv}{dy} dy + \frac{dv}{dz} dz + \frac{dv}{dp} dp + \frac{dv}{dq} dq \right], \end{aligned}$$

et si dans cette dernière on substitue pour $\frac{du}{dx}, \frac{du}{dp}, \frac{dv}{dx}, \frac{dv}{dp}$ leurs valeurs tirées des quatre équations qui précèdent, et qu'on remplace dz par $pdx + qdy$, on obtiendra

$$R\theta dp + Tdq - V\theta dx = \Phi(dy - \theta dx),$$

Φ étant un coefficient fonction de $\varphi'(v)$, et par conséquent indéterminé. On en conclut donc que si

$$u = c, \quad v = c'$$

satisfont au système des équations simultanées

$$R\theta dp + Tdq - V\theta dx = 0, \quad dy - \theta dx = 0,$$

l'intégrale de la proposée

$$Rr + Ss + Tt = V$$

sera

$$u = \varphi(v),$$

φ désignant une fonction arbitraire.

Ce que nous venons de dire pour le cas d'une équation aux dérivées partielles du second ordre entre trois variables, linéaire par rapport à ces dérivées, est évidemment applicable au cas où l'ordre des dérivées et le nombre des variables est plus considérable, et il serait superflu de rien ajouter à cet égard. Il nous reste seulement à en faire quelques applications.

239. EXEMPLES. — 1° Soit l'équation aux dérivées partielles du second ordre

$$x^2 \frac{d^2 z}{dx^2} + 2xy \frac{d^2 z}{dx dy} + y^2 \frac{d^2 z}{dy^2} = 0$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$x^2 r + 2sxy + y^2 t = 0.$$

On a ici

$$R = x^2, \quad S = 2xy, \quad T = y^2, \quad V = 0,$$

et l'équation (5) devient

$$x^2 \theta^2 - 2xy \theta + y^2 = 0,$$

c'est-à-dire

$$(\theta x - y)(\theta x - y) = 0,$$

en sorte que l'on a pour l'une ou l'autre des racines de cette équation

$$\theta = \frac{y}{x}.$$

En portant cette valeur de θ dans les équations (6), on trouve pour les équations différentielles simultanées

$$dy - \frac{y}{x} dx = 0, \quad xdp + ydq = 0.$$

La première de ces équations donne

$$y = cx,$$

et en mettant pour x , dans la seconde, sa valeur $\frac{y}{c}$ tirée de la précédente, on a

$$dp + cdq = 0,$$

d'où

$$p + cq = c'.$$

Remettant pour c sa valeur $\frac{y}{x}$, et posant $c' = \varphi(c)$, en vertu de la relation $u = \varphi(v)$, on trouve

$$p + q \frac{y}{x} = \varphi\left(\frac{y}{x}\right),$$

équation du premier ordre et du premier degré qu'il s'agit d'intégrer.

Or, en appliquant à cette équation la méthode du n° (231), on trouve

$$x dy - y dx = 0, \quad dz - dx \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = 0.$$

La première donne encore

$$y = cx,$$

et l'on tire de la seconde

$$z - x \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = c'.$$

En vertu de la relation $c' = \varphi(c)$, on a donc pour l'intégrale cherchée

$$z - x \varphi\left(\frac{y}{x}\right) = \psi\left(\frac{y}{x}\right),$$

φ et ψ étant deux fonctions arbitraires.

2° Soit encore

$$q^2 r - 2 p q s + p^2 t = 0.$$

On a

$$R = q^3, \quad S = -2pq, \quad T = p^3, \quad V = 0;$$

l'équation (5) donne

$$\theta = -\frac{p}{q},$$

et il s'agit d'intégrer d'abord le système des équations simultanées

$$p dx + q dz = 0 \quad \text{ou} \quad dz = 0 \quad \text{et} \quad q dp - p dq = 0.$$

Or, la première de ces équations donne immédiatement $z = c$; et l'on tire de la seconde $p = c'q$, en sorte que

$$p = q \varphi(z).$$

En appliquant à cette équation qui est du premier ordre et du premier degré la méthode du n° (251), on a ensuite

$$dz = 0, \quad dx \varphi(z) + dy = 0,$$

d'où

$$z = c, \quad x\varphi(z) + y = c'.$$

On a donc

$$z = \psi[x\varphi(z) + y],$$

ou sous une autre forme

$$y = x\varphi(z) + \psi(z).$$

Remarquons en terminant que le théorème précédent n'a pas la même généralité que celui du n° (231); car les équations aux différentielles totales simultanées, auxquelles on est conduit par l'application de cette méthode, peuvent bien ne pas être intégrables. Elles ne le sont, en effet, comme on l'a vu n° (40), que lorsqu'elles sont les différentielles exactes de certaines fonctions de x, y, z, p, q ; et l'on sait que cela n'a lieu que sous certaines conditions.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES LINÉAIRES ET A COEFFICIENTS CONSTANTS D'UN ORDRE QUELCONQUE.

240. Lorsque l'équation aux dérivées partielles est linéaire par rapport à ses dérivées, et que de plus les coefficients qui multiplient ces dérivées sont constants, l'intégrale peut toujours s'obtenir d'une manière générale. Considérons, par exemple, l'équation de l'ordre m qui a lieu entre les trois variables x, y, z , z étant une fonction des deux autres. Sa forme la plus générale sera

$$\frac{d^m z}{dx^m} + a \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1} dy} + a_1 \frac{d^{m-2} z}{dx^{m-2} dy^2} \dots + s_1 \frac{d^2 z}{dy^2} + t \frac{dz}{dx} + t_1 \frac{dz}{dy} + uz = v,$$

$a, a_1, a_2, \dots, s, s_1, s_2, \dots, t, t_1, u, v$, étant des constantes; et si l'on remplace dans cette équation, z par $z + \frac{v}{u}$, on la réduira à celle

$$\frac{d^m z}{dx^m} + a \frac{d^m z}{dx^{m-1} dy} + a_1 \frac{d^m z}{dx^{m-2} dy^2} \dots + s, \frac{d^2 z}{dy^2} + t \frac{dz}{dx} + t_1 \frac{dz}{dy} + uz = 0$$

qui jouit de la propriété d'être satisfaite par la somme d'un nombre quelconque de valeurs particulières de z .

Posons donc

$$z = Ae^{\alpha x + \epsilon y}.$$

Cette équation satisfera à l'équation proposée, pourvu que la constante ϵ satisfasse elle-même à l'équation

$$\alpha^m + a\alpha^{m-1}\epsilon + a_1\alpha^{m-2}\epsilon^2 \dots + t\alpha + t_1\epsilon + u = 0$$

qui résulte de la substitution de $Ae^{\alpha x + \epsilon y}$ à la place de z dans la proposée; et si l'on tire de cette valeur celle de ϵ en fonction de α qu'elle détermine, savoir $\epsilon = \varphi(\alpha)$, on aura

$$z = Ae^{\alpha x + y\varphi(\alpha)}.$$

On aura semblablement pour les autres valeurs de ϵ que nous désignerons par $\varphi_1(\alpha)$, $\varphi_2(\alpha)$, $\varphi_3(\alpha)$...

$$z = Be^{\alpha x + y\varphi_1(\alpha)}, \quad z = Ce^{\alpha x + y\varphi_2(\alpha)}, \quad z = Ee^{\alpha x + y\varphi_3(\alpha)},$$

et en désignant par α_1 , α_2 , α_3 ..., des valeurs quelconques attribuées à α , et par A_1 , A_2 , A_3 ..., B_1 , B_2 ..., C_1 , C_2 ..., etc., d'autres valeurs des constantes A , B , C ...

$$z = A_1 e^{\alpha_1 x + y\varphi(\alpha_1)}, \quad z = A_2 e^{\alpha_2 x + y\varphi(\alpha_2)} \text{ etc.},$$

$$z = B_1 e^{\alpha_1 x + y\varphi_1(\alpha_1)}, \quad z = B_2 e^{\alpha_2 x + y\varphi_1(\alpha_2)} \text{ etc.}$$

La somme de toutes ces solutions formera encore une solution de la proposée, et l'on aura

$$\begin{aligned} z = & Ae^{\alpha x + y\varphi(\alpha)} + A_1 e^{\alpha_1 x + y\varphi(\alpha_1)} + A_2 e^{\alpha_2 x + y\varphi(\alpha_2)} + \text{etc.}, \\ & + Be^{\alpha x + y\varphi_1(\alpha)} + B_1 e^{\alpha_1 x + y\varphi_1(\alpha_1)} + B_2 e^{\alpha_2 x + y\varphi_1(\alpha_2)} + \text{etc.}, \\ & + \dots \end{aligned}$$

ou sous une forme abrégée

$$z = \sum A e^{\alpha x + y \varphi(x)} + \sum B e^{\alpha x + y \varphi_1(x)} + \text{etc.}$$

Le nombre des termes de chaque somme est arbitraire, et A et α , B et α , etc., peuvent changer en passant d'un terme à un autre.

241. Lorsque les valeurs de ϕ sont toutes des fonctions linéaires de α , l'expression de l'intégrale générale peut s'obtenir sous une forme très-simple; et il est aisé de voir alors que cette intégrale renferme autant de fonctions arbitraires qu'il y a de valeurs de ϕ linéaires.

En effet, soient

$$\begin{aligned} \phi &= m\alpha + n, \\ \phi &= m_1\alpha + n_1, \\ \phi &= m_2\alpha + n_2, \\ &\dots \end{aligned}$$

ces diverses racines fonctions linéaires de α . L'équation (3) donnera, en remplaçant $\varphi(x)$ ou ϕ par $m\alpha + n$; $\varphi_1(x)$ par $m_1\alpha + n_1$; et, ainsi de suite,

$$\begin{aligned} z &= \sum A e^{ny} e^{\alpha(x+my)} + \sum B e^{n_1y} e^{\alpha(x+m_1y)} + \\ &= e^{ny} \sum A e^{\alpha(x+my)} + e^{n_1y} \sum B e^{\alpha(x+m_1y)} + \dots, \end{aligned}$$

et comme le nombre des termes de chaque série est arbitraire, ainsi que A, B,... et α , on en conclut que les sommes

$$\sum A e^{\alpha(x+my)}, \quad \sum B e^{\alpha(x+m_1y)} \text{ etc.,}$$

ne sont autre chose que des fonctions arbitraires de e^{x+my} , e^{x+m_1y} ,... respectivement, ou si l'on veut de $x+my$, $x+m_1y$,... En désignant par $\psi(x+my)$, $\psi_1(x+m_1y)$,... ces diverses fonctions arbitraires, on aura donc

$$z = e^{ny} \psi(x + my) + e^{n_1 y} \psi_1(x + m_1 y) + e^{n_2 y} \psi_2(x + m_2 y) + \dots \\ + e^{n_{(m-1)} y} \psi_{(m-1)}(x + m_{(m-1)} y),$$

et cette expression renfermant m fonctions arbitraires sera l'intégrale générale de l'équation proposée (1).

242. Appliquons cette méthode à l'équation

$$(1) \quad \frac{d^2 z}{dx^2} = a^2 \frac{dz}{dy^2}$$

qui se rapporte au fameux problème des cordes vibrantes, et dans laquelle z est une fonction de x et y qu'il faut déterminer de manière que pour $x = 0$, on ait

$$(2) \quad z = F(y),$$

$$(3) \quad \frac{dz}{dy} = f(y).$$

En posant

$$z = Ce^{ax + by},$$

et substituant cette valeur dans l'équation proposée (1), on aura

$$a^2 = a^2 b^2,$$

d'où

$$a = + ab, \quad a = - ab,$$

et, par suite, la valeur de l'intégrale générale sera

$$(4) \quad z = \psi(x + ax) + \psi_1(y - ax),$$

ψ et ψ_1 étant deux fonctions arbitraires qu'il nous faut maintenant déterminer par les conditions

$$z_0 = F(y), \quad \left(\frac{dz}{dx} \right)_0 = f(y)$$

relatives à $x = 0$.

Or, en différentiant l'équation (4), on en tire

$$\frac{dz}{dx} = a \psi'(y + ax) - a \psi_1'(y - ax).$$

et, si dans cette équation, ainsi que dans celle (5), on fait $x = 0$, on aura

$$\begin{aligned} z_0 &= \psi(y) + \psi_1(y), \\ \left(\frac{dz}{dx}\right)_0 &= a\psi'(y) - a\psi'_1(y). \end{aligned}$$

Pour satisfaire aux deux conditions ci-dessus, il faudra donc poser

$$\begin{aligned} \psi(y) + \psi_1(y) &= F(y) \\ \psi'(y) - \psi'_1(y) &= \frac{1}{a} f(y) \\ &= \psi(y) - \psi_1(y) = \frac{1}{a} \int_{y_0}^y f(y) dy + C = F_1(y) + C. \end{aligned}$$

On tire de ces équations, en les combinant,

$$\begin{aligned} \psi(y) &= \frac{1}{2} F(y) + \frac{1}{2} F_1(y) + C, \\ \psi_1(y) &= \frac{1}{2} F(y) - \frac{1}{2} F_1(y) - C. \end{aligned}$$

Par suite, on a pour la valeur de z satisfaisant à l'équation proposée (1) et aux conditions (2).

$$z = \frac{F(y+ax) + F(y-ax)}{2} + \frac{F_1(y+ax) - F_1(y-ax)}{2}.$$

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES A L'AIDE DES SÉRIES.

243. Lorsque l'équation aux dérivées partielles ne peut pas être intégrée par les méthodes qui précèdent, on peut se proposer de développer son intégrale en séries; et pour cela on peut employer le théorème de Taylor ou celui de Maclaurin, comme on l'a fait n° (208). On peut aussi employer la méthode des coefficients indéterminés, ce qui offre souvent

de l'avantage, Nous allons dans ce qui va suivre donner un exemple de l'une et de l'autre de ces méthodes.

Considérons d'abord l'équation

$$(1) \quad \frac{dz}{dx} = a \frac{d^2z}{dy^2}$$

qui exprime la loi du mouvement de la chaleur dans une barre prismatique, et dans laquelle a désigne une constante.

En différenciant cette équation par rapport à x , on en tire

$$(2) \quad \begin{cases} \frac{d^2z}{dx^2} = a \frac{d^3z}{dy^2 dx} = a \frac{d^2}{dx} \frac{dz}{dy^2} = a^2 \frac{d^4z}{dy^4}, \\ \frac{d^3z}{dx^3} = a^2 \frac{d^4z}{dy^4 dx} = a^2 \frac{d^4}{dx} \frac{dz}{dy^4} = a^3 \frac{d^6z}{dy^6}, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

La valeur de z répondant à $x = x_0$ est une fonction arbitraire de y que nous représenterons par $\varphi(y)$; et en désignant par $\varphi''(y)$, $\varphi'''(y)$, $\varphi^{(4)}(y)$ les valeurs des dérivées $\frac{d^2z}{dy^2}$, $\frac{d^3z}{dy^3}$, $\frac{d^4z}{dy^4}$, qui répondent à $x = x_0$, on aura, pour le développement de la fonction z suivant les puissances de $x - x_0$,

$$z = \varphi(y) + a \frac{\varphi''(y)}{1} (x - x_0) + a^2 \frac{\varphi^{(4)}(y)}{1.2} (x - x_0)^2 + \dots$$

expression qui ne renferme, comme on le voit, que la seule fonction arbitraire $\varphi(y)$.

244. Si l'on voulait développer z suivant les puissances de $y - y_0$, on prendrait

$$\frac{d^2z}{dy^2} = \frac{1}{a} \frac{dz}{dx},$$

et appliquant le même raisonnement, on serait conduit au développement :

$$z = f(y) + \frac{f'(y)}{1.2} \frac{(y-y_0)^2}{a} + \frac{f''(y)}{1.2.3.4} \frac{(y-y_0)^4}{a^2} + \dots$$

$$+ \frac{F(y)}{1} (y-y_0) + \frac{F'(y)}{1.2.3} \frac{(y-y_0)^3}{a} + \dots$$

qui renferme deux fonctions arbitraires $f(y)$, $F(y)$, valeurs de z et $\frac{dz}{dy}$ pour $y = y_0$, mais qui n'est pas plus général que le précédent, comme l'a montré Poisson dans sa *Théorie de la Chaleur*.

245. Appliquons maintenant la méthode des coefficients indéterminés à l'équation

$$\frac{d^2 z}{dx^2} = a^2 \frac{dz}{dy}.$$

Supposons l'intégrale développée suivant les puissances entières de x , et posons

$$z = Y + Y'x + Y''x^2 + Y'''x^3 + \dots$$

Y , Y' , Y'' , étant des coefficients, fonctions de y qu'il s'agit de déterminer. En substituant cette valeur de z dans l'équation différentielle proposée, et égalant ensuite les coefficients des mêmes puissances de x dans les deux membres, on en déduira

$$Y'' = \frac{a}{1.2} \frac{dY}{dy}, \quad Y''' = \frac{a}{1.2.3} \frac{dY'}{dy}, \quad Y^{(4)} = \frac{a}{3.4} \frac{dY''}{dy} \dots$$

Ainsi, les deux coefficients Y et Y' restent arbitraires. Mais ce sont des fonctions de y . En les désignant par $f(y)$ et $F(y)$, et représentant par $f'(y)$, $f''(y)$, ... $F'(y)$, $F''(y)$, ... les dérivées successives de ces fonctions, on aura donc pour le développement de l'intégrale cherchée

$$z = f(y) + xF(y) + \frac{ax^3}{1.2} f'(y) + \frac{ax^3}{1.2.5} F'(y) + \dots$$

$$+ \frac{a^2x^4}{1.2.3.4} f''(y) + \frac{a^2x^4}{1.2...5} F''(y) + \dots$$

développement qui renferme les deux fonctions arbitraires $f(y)$ et $F(y)$.

INTÉGRATION DES ÉQUATIONS LINÉAIRES AUX DÉRIVÉES PARTIELLES
PAR LE MOYEN DES INTÉGRALES DÉFINIES.

246. Considérons, en premier lieu, l'équation

$$(1) \quad \frac{dz}{dt} = a^2 \frac{d^2z}{dy^2}$$

qui se rapporte au mouvement de la chaleur dans une barre prismatique dont la surface est imperméable.

Admettons que pour $t = 0$, la fonction z doive se réduire à $F(x)$, et posons

$$(2) \quad z = F(x) \quad \text{pour} \quad t = 0.$$

On satisfera à l'équation (1), à cause de sa forme linéaire, en prenant la valeur particulière

$$z = Ae^{-a^2\alpha^2 t} \cos \alpha(y - \zeta),$$

A , α , ζ , étant des constantes arbitraires; et si l'on pose

$$A = \varphi(\zeta) d\zeta d\alpha,$$

φ étant arbitraire, et que l'on intègre ensuite par rapport à α et ζ , entre les limites $-\infty$ et $+\infty$, on aura une solution plus générale de l'équation (1), exprimée par l'équation

$$z = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\zeta) e^{-a^2\alpha^2 t} \cos \alpha(y - \zeta) d\alpha d\zeta.$$

Pour $t = 0$, cette équation se réduit à $2\pi\varphi(y)$, en vertu de la formule de Fourier; et, par conséquent, on satisfait à la condition (2), en prenant

$$\varphi(y) = \frac{F(y)}{2\pi}.$$

Ainsi, la valeur de z satisfaisant aux deux équations (1) et (2) est

$$z = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\zeta) e^{-a^2 \alpha^2 t} \cos \alpha(y - \zeta) d\alpha d\zeta.$$

Cette intégrale double est facilement réductible.

En effet, on a, d'après la formule du n° (58)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a^2 \alpha^2 t} \cos \alpha(y - \zeta) d\alpha = \frac{\sqrt{\pi}}{a\sqrt{t}} e^{-\frac{(y - \zeta)^2}{4a^2 t}},$$

d'où

$$z = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}\sqrt{t}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\left(\frac{y - \zeta}{2a\sqrt{t}}\right)^2} F(\zeta) d\zeta,$$

et si l'on pose dans cette dernière

$$\left(\frac{y - \zeta}{2a\sqrt{t}}\right)^2 = \theta^2,$$

d'où

$$\zeta = y - 2a\theta\sqrt{t} \quad \text{et} \quad d\zeta = -2a\sqrt{t} d\theta,$$

on la réduira à la forme plus simple

$$z = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\theta^2} F(y - 2a\theta\sqrt{t}) d\theta.$$

247. Soit encore l'équation

$$\frac{du}{dt} = a^2 \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right)$$

qui se rapporte à la propagation de la chaleur dans un milieu homogène. En admettant toujours que la fonction u doive

se réduire à $F(x, y, z)$ pour $t = 0$, on trouvera par le moyen de la formule de Fourier étendue au cas de trois variables

$$u = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\zeta, \mu, \lambda) e^{-(\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2) a^2 t} \\ \times \cos \alpha(x - \zeta) \cos \beta(y - \mu) \cos \gamma(z - \lambda) d\zeta d\mu d\lambda d\alpha d\beta d\gamma,$$

et par des transformations analogues à celles que nous avons employées pour le cas de l'intégrale double ci-dessus, on réduira cette intégrale sextuple à celle triple

$$u = \frac{1}{\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\theta^2 + \theta'^2 + \theta''^2)} F(x + 2a\theta\sqrt{t}, y + 2a\theta'\sqrt{t}, z + 2a\theta''\sqrt{t}) d\theta d\theta' d\theta''.$$

248. Considérons maintenant l'équation

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 y}{dx^2}$$

qui se rapporte au problème des cordes vibrantes, et que nous avons déjà traité par une autre méthode n° (242).

Admettons que pour $t = 0$, les fonctions y et $\frac{dy}{dt}$ doivent se réduire respectivement à $F(x)$ et $f(x)$; et posons

$$(2) \quad y = F(x),$$

$$(3) \quad \frac{dy}{dt} = f(x) \quad \text{pour } t = 0.$$

On satisfera à l'équation (1), en prenant

$$y = A \cos \alpha t \cos \alpha(x - \zeta),$$

A , α , ζ , désignant des constantes; et si l'on pose

$$A = \varphi(\zeta) d\zeta d\alpha,$$

et que l'on intègre ensuite par rapport à ζ et α , entre les li-

mites $-\infty$ et $+\infty$, on aura une solution plus générale de l'équation proposée (1) exprimée par l'équation

$$y = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\zeta) \cos \alpha x t \cos \alpha(x - \zeta) d\alpha d\zeta.$$

Mais pour $t = 0$ cette formule se réduit à $2\pi\varphi(x)$; par conséquent on satisfait à la condition (2) en prenant

$$\varphi(x) = \frac{F(x)}{2\pi}.$$

Ainsi, l'expression

$$(4) \quad y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\zeta) \cos \alpha x t \cos \alpha(x - \zeta) d\alpha d\zeta$$

satisfait aux équations (1) et (2). Mais elle donne $\frac{dy}{dt} = 0$ pour $t = 0$, et par conséquent ne satisfait pas à la condition (3). Si donc on peut trouver une autre valeur de y qui satisfasse aux équations (1) et (3), et qui soit telle que pour $t = 0$ elle se réduise à zéro, il est clair qu'en l'ajoutant à celle que donne l'équation (4), on aura une valeur de y satisfaisant à toutes les conditions du problème.

Or, si l'on intègre par rapport à t l'équation (4), et qu'on y remplace F par f , on aura une solution de l'équation (1) représentée par

$$y = \frac{1}{2\pi\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) \frac{\sin \alpha x t}{\alpha} \cos \alpha(x - \zeta) d\alpha d\zeta;$$

la dérivée par rapport à t de cette équation ou

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\zeta) \cos \alpha x t \cos \alpha(x - \zeta) d\alpha d\zeta$$

satisfera encore à l'équation proposée (1) et se réduira à $f(x)$ pour $t = 0$. D'ailleurs cette valeur de y se réduit à zéro pour $t = 0$, et par conséquent ne satisfait pas à la condition (2).

Donc on aura une solution générale de la question proposée, en prenant

$$y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\zeta) \cos \alpha x t \cos \alpha(x - \zeta) d\alpha d\zeta \\ + \frac{1}{2\pi\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) \frac{\sin \alpha x t}{\alpha} \cos \alpha(x - \zeta) d\alpha d\zeta.$$

Il ne reste plus qu'à chercher si ces intégrales doubles peuvent être transformées.

Or, si l'on remplace dans la première $\cos \alpha x t \cos \alpha(x - \zeta)$ par

$$\frac{1}{2} [\cos \alpha(x + at - \zeta) + \cos \alpha(x - at - \zeta)],$$

on fera prendre à cette intégrale la forme

$$\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\zeta) \cos \alpha(x + at - \zeta) + \cos \alpha(x - at - \zeta) d\alpha d\zeta,$$

et si l'on compare celle-ci avec la formule de Fourier, on obtiendra pour sa valeur

$$\frac{1}{2} [F(x + at) + F(x - at)].$$

De même, si dans la seconde on pose

$$\sin \alpha x t \cos \alpha(x - \zeta) = \frac{1}{2} [\sin \alpha(x + at - \zeta) - \sin \alpha(x - at - \zeta)],$$

on aura pour sa transformée

$$(a) \quad \frac{1}{4\pi\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) \left[\frac{\sin \alpha(x + at - \zeta)}{\alpha} - \frac{\sin \alpha(x - at - \zeta)}{\alpha} \right] d\alpha d\zeta.$$

Mais

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin m\alpha}{\alpha} d\alpha = \pi \quad \text{ou} \quad -\pi,$$

suivant que m est positif ou négatif. Donc l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\sin x(x+at-\zeta)}{\alpha} - \frac{\sin x(x-at-\zeta)}{\alpha} \right] d\alpha$$

sera égale à $+\pi$ ou à $-\pi$, suivant que l'on aura

$$\zeta > x - at, \quad \zeta < x + at,$$

c'est-à-dire $t > 0$ ou

$$\zeta > x + at, \quad \zeta < x - at,$$

ce qui suppose $t < 0$.

D'ailleurs cette intégrale est nulle toutes les fois que $x + at - \zeta$ et $x - at - \zeta$ sont de même signe. Donc la valeur de l'intégrale (a) est

$$\frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} f(\zeta) d\zeta = \frac{1}{2a} [\varphi(x+at) - \varphi(x-at)]$$

en posant $\int f(x) dx = \varphi(x)$. D'après cela, on a,

$$y = \frac{1}{2} [F(x+at) + F(x-at)] + \frac{1}{2a} [\varphi(x+at) - \varphi(x-at)].$$

249. Soit maintenant l'équation

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = a^2 \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 u}{dy^2} + \frac{d^2 u}{dz^2} \right)$$

qui régit les lois de la propagation des ondes dans un milieu dont l'élasticité est la même en tous sens. En admettant toujours que les fonctions u et $\frac{du}{dt}$ doivent se réduire à $f(x, y, z)$ et $F(x, y, z)$ pour $t = 0$, on trouvera pour u une intégrale de la forme

$$u = \frac{1}{8\pi^3} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\zeta, \mu, \lambda) \cos \theta t + f(\zeta, \mu, \lambda) \frac{\sin \theta t}{\theta} \\ \times \cos \alpha(x-\zeta) \cos \beta(y-\mu) \cos \gamma(z-\lambda) d\zeta d\mu d\lambda d\alpha d\beta d\gamma,$$

et cette intégrale se transformera, comme l'a montré Poisson (t. III des *Nouveaux mémoires de l'Académie des Sciences*), en une intégrale double

$$u = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F(x + at \cos \theta, y + at \sin \theta \sin \psi, z - at \sin \theta \cos \psi) t \sin \theta d\theta d\psi \\ + \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dt} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(x + at \cos \theta, y + at \sin \theta \sin \psi, z + at \sin \theta \cos \psi) t \sin \theta d\theta d\psi.$$

250. On peut conclure de là l'intégrale de l'équation plus générale

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = a^2 \frac{d^2 u}{dx^2} + b^2 \frac{d^2 u}{dy^2} + c^2 \frac{d^2 u}{dz^2}.$$

En effet, si l'on pose

$$x = ax', \quad y = by', \quad z = cz'$$

on réduira cette équation à celle

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \frac{d^2 u}{dx'^2} + \frac{d^2 u}{dy'^2} + \frac{d^2 u}{dz'^2}$$

dont l'intégrale est donnée par la formule qui précède. On aura

ainsi, en remplaçant x' , y' , z' , par leurs valeurs $\frac{x}{a}$, $\frac{y}{b}$, $\frac{z}{c}$,

$$u = \frac{1}{4\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} F(x + at \cos \theta, y + bt \sin \theta \cos \psi, z + ct \sin \theta \sin \psi) t \sin \theta d\theta d\psi \\ + \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dt} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} f(x + at \cos \theta, y + bt \sin \theta \cos \psi, z + ct \sin \theta \sin \psi) t \sin \theta d\theta d\psi.$$

251. Considérons enfin l'équation

$$(1) \quad \frac{d^2 y}{dt^2} + a^2 \frac{d^2 y}{dx^2} = 0,$$

qui se rapporte à la propagation des vibrations transversales d'une verge élastique.

Admettons que l'on ait

$$(2) \quad y = F(x),$$

$$(3) \quad \frac{dy}{dt} = f(x) \quad \text{pour} \quad t = 0.$$

On satisfera à la proposée par la valeur particulière

$$y = A \cos \alpha^2 at \cos \alpha(x - \zeta).$$

Supposons $A = \varphi(\zeta) d\zeta dx$, et intégrons par rapport à x et ζ entre $-\infty$ et $+\infty$; on obtiendra une solution plus générale de l'équation proposée représentée par

$$y = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\zeta) \cos \alpha^2 at \cos \alpha(x - \zeta) dx d\zeta.$$

Pour $t = 0$, cette formule se réduit à $2\pi\varphi(x)$; par conséquent, on satisfait à la condition (2), en prenant

$$\varphi(x) = \frac{F(x)}{2\pi}.$$

D'où il suit que l'expression

$$(4) \quad y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\zeta) \cos \alpha^2 at \cos \alpha(x - \zeta) dx d\zeta$$

satisfait aux équations (1) et (2); mais elle donne $\frac{dy}{dt} = 0$ pour $t = 0$, et par conséquent ne satisfait pas à la condition (3). Il nous faut donc trouver une valeur de y qui satisfasse aux équations (1) et (3), et qui soit telle que pour $t = 0$ elle se réduise à zéro.

Or, si l'on intègre l'expression (4) par rapport à t , et que l'on remplace F par f , on aura une solution de l'équation (1) exprimée par la formule

$$y = \frac{1}{2\pi a} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) \frac{\sin \alpha^2 at}{\alpha^2} \cos \alpha(x - \zeta) dx d\zeta;$$

cette expression différenciée par rapport à t donne

$$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) \cos \alpha^2 at \cos \alpha(x - \zeta) d\alpha d\zeta,$$

équation qui se réduit à $f(x)$ pour $t = 0$, et qui par conséquent satisfait à la condition (5). Il est clair d'ailleurs que l'expression de y ci-dessus se réduit à zéro pour $t = 0$, en sorte qu'elle ne satisfait pas à la condition (2). Donc on satisfera à toutes les conditions du problème en prenant

$$y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(\zeta) \cos \alpha^2 at \cos \alpha(x - \zeta) d\alpha d\zeta \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta) \frac{\sin \alpha^2 t}{\alpha^3} \cos \alpha(x - \zeta) d\alpha d\zeta.$$

La première partie de cette valeur de y peut être mise sous une forme plus simple. En effet, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} \cos \alpha^2 at \cos \alpha(x - \zeta) d\alpha \\ = \sqrt{\frac{\pi}{2t}} \left[\cos \left(\frac{x - \zeta}{2\sqrt{at}} \right)^2 + \sin \left(\frac{x - \zeta}{2\sqrt{at}} \right)^2 \right],$$

et si l'on pose

$$\zeta = x + 2\theta \sqrt{at},$$

on réduira cette première partie à

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) F(x + 2\theta \sqrt{at}) d\theta.$$

Ainsi, dans le cas où l'on doit avoir $\frac{dy}{dt} = 0$ pour $t = 0$, la solution générale de la question est donnée par la formule

$$y = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) F(x + 2\theta \sqrt{at}) d\theta.$$

LIVRE IV.

CALCUL DES VARIATIONS.

CHAPITRE PREMIER.

VARIATION D'UNE INTÉGRALE DÉFINIE.

OBJET DU CALCUL DES VARIATIONS.

252. Le calcul des variations, l'une des plus belles conceptions de l'immortel Lagrange, a été inventé par ce géomètre pour la résolution d'une nouvelle espèce de question relative au maxima et au minima.

Dans les questions ordinaires, on donne une fonction u d'une ou de plusieurs variables x, y, z , et il s'agit de trouver les valeurs déterminées que l'on doit attribuer à ces variables pour que la fonction proposée u devienne un maximum ou un minimum.

Dans les questions de maxima et de minima qui se rapportent au calcul des variations, on considère une expression différentielle

$$F\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2} \dots\right)$$

renfermant une variable x , une fonction y de cette variable

et quelques-unes des dérivées de cette fonction par rapport à cette variable, et l'on se propose de déterminer cette fonction inconnue y , de manière que l'intégrale de l'expression différentielle proposée, prise entre des limites données, fixes ou variables, ait une valeur maximum ou minimum.

La marche à suivre pour résoudre ces nouvelles espèces de questions ne diffère pas de celle suivie dans les questions ordinaires. On suppose connue la fonction cherchée y ; on fait varier infiniment peu cette fonction, et l'on exprime que, dans tous les cas, la valeur de l'intégrale augmente si cette intégrale doit être un minimum, ou qu'elle diminue si elle doit être un maximum. Mais avant d'appliquer cette règle, il nous faut entrer dans quelques détails préliminaires.

DES VARIATIONS.

253. Considérons deux courbes infiniment voisines AB, CD, fig. (19), et soient

$$y = F(x), \quad \text{et} \quad y = f(x)$$

les équations de ces deux courbes. Si l'on passe d'un point M de la première à un point N de la seconde, l'ordonnée MP correspondante au point M prendra un accroissement MN égal à la différence des ordonnées PM, PN, ou à $f(x) - F(x)$, et cet accroissement sera nommé la *variation* de l'ordonnée $MP = y$ ou de la fonction $F(x)$. On représente cet accroissement par la caractéristique δ que l'on place au devant de la fonction y ; ainsi, l'on écrit

$$\delta y = f(x) - F(x).$$

Quand on suppose que x et y varient en même temps, on a

$$\delta y = MF - Q'N' = RN' \quad \text{et} \quad \delta x = OP - OQ' = PQ',$$

Quoique les variations δx et δy soient des quantités infiniment petites aussi bien que les différentielles dx et dy , il faut bien se garder de les confondre avec ces dernières. En effet, dx et dy sont les accroissements infiniment petits que prennent respectivement les variables x et y quand on passe d'un point d'une courbe au point infiniment voisin de la même courbe, tandis que δy et δx représentent les accroissements que prennent les mêmes variables, quand on passe d'un point d'une courbe à un autre point infiniment voisin, mais pris sur la courbe infiniment peu différente de la première; ainsi, on a $dx = PQ$, tandis que $\delta x = PQ'$; $dy = M'I$, tandis que $\delta y = RN'$.

Lorsque les variations de toutes les quantités qui entrent dans une fonction sont connues, on obtient la variation de cette fonction, en appliquant les règles du calcul différentiel qui font connaître la différentielle d'une fonction d'après les différentielles de ses variables. Ainsi, $y = F(x, y, z, \dots)$ étant une fonction des variables x, y, z , on a pour la variation δy de cette fonction

$$\delta y = \delta F(x, y, z, \dots) = \frac{dF}{dx} \delta x + \frac{dF}{dy} \delta y + \frac{dF}{dz} \delta z + \dots$$

INTERVERTISSEMENT DES SIGNES δ ET d .

254. On peut intervertir l'ordre des signes δ et d . En effet, soient y l'ordonnée d'un point de la première courbe, et $y + dy$ celle du point infiniment voisin sur la même courbe; $y + \delta y$ sera l'ordonnée du point correspondant de la seconde courbe, et l'on aura pour celle du point suivant de la même courbe

$$y + dy + \delta(y + dy),$$

ou

$$y + \delta y + d(y + \delta y).$$

Mais ces deux valeurs des ordonnées sont égales, en sorte que

$$y + dy + \delta(y + dy) = y + \delta y + d(y + \delta y),$$

ou

$$y + dy + \delta y + \delta dy = y + \delta y + dy + d\delta y.$$

On a donc

$$\delta dy = d\delta y,$$

ce qui montre que la variation de la différentielle d'une fonction y de x est égale à la différentielle de la variation.

On conclut de là que

$$\delta d^2 y = d\delta dy = d^2 \delta y,$$

et, en général,

$$\delta d^n y = d^n \delta y,$$

ou

$$(1) \quad \frac{\delta d^n y}{dx^n} = \frac{d^n \delta y}{dx^n}.$$

INTERVERTISSEMENT DES SIGNES δ et $\int$.

255. On peut intervertir l'ordre des signes δ et $\int$. En effet, soit

$$\int V = U,$$

U désignant une expression différentielle quelconque. En différentiant cette expression, on a

$$V = dU,$$

et, en prenant les variations,

$$\delta V = \delta dU,$$

ou, transposant les caractéristiques δ et d ,

$$\delta V = d\delta U.$$

Intégrant cette expression, on aura donc

$$\int \delta V = \delta U,$$

et, en remettant pour U sa valeur,

$$(1) \quad \int \delta V = \delta \int V,$$

ce qui nous apprend que *l'intégrale de la variation d'une fonction différentielle est égale à la variation de l'intégrale de cette différentielle.*

Ce théorème s'étend de lui-même aux intégrales multiples. En effet, si l'on suppose

$$V = \int P,$$

on aura par l'équation (1)

$$\int \delta \int P = \delta \int \int P,$$

et, en transposant les caractéristiques $\int$ et δ ,

$$\int \int \delta P = \delta \int \int P.$$

On aura de même

$$\int \int \int \delta P = \delta \int \int \int P,$$

et, en général,

$$\int^n \delta P = \delta \int^n P.$$

EXPRESSION DE LA VARIATION D'UNE INTÉGRALE DÉFINIE.

256. Soit

$$\int_{x_1}^{x_2} V dx$$

une intégrale définie dans laquelle

$$V = \varphi[x, y, y', y'', y''' \dots y^{(n)}],$$

$y', y'', \dots y^{(n)}$, étant les dérivées de la fonction y par rapport à la variable x . Proposons-nous de déterminer la variation de cette intégrale ou $\delta \int_{x_1}^{x_2} V dx$. Nous distinguerons deux cas suivant que les limites x_1 et x_2 sont constantes ou qu'elles sont variables. Supposons d'abord x_1 et x_2 constants. On aura

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} V dx = \int_{x_1}^{x_2} \delta(V dx).$$

Mais x_1 et x_2 étant constants, on a $\delta x = 0$, et aussi $d\delta x = 0$. Donc $\delta(V dx) = \delta V dx$, et, par conséquent,

$$(1) \quad \delta \int_{x_1}^{x_2} V dx = \int_{x_1}^{x_2} \delta V dx.$$

Il reste à calculer δV . Or, si l'on remarque que, dans l'expression de V , les quantités qui varient sont $y, y', y'', \dots y^{(n)}$, on aura

$$\delta V = \frac{dV}{dy} \delta y + \frac{dV}{dy'} \delta y' + \frac{dV}{dy''} \delta y'' + \dots + \frac{dV}{dy^{(n)}} \delta y^{(n)},$$

expression que l'on peut écrire, en représentant $\frac{dV}{dy}, \frac{dV}{dy'}, \dots \frac{dV}{dy^{(n)}}$, respectivement par $M, N, P, \dots U$,

$$\delta V = M\delta y + N\delta y' + P\delta y'' + Q\delta y''' + \dots + U\delta y^{(n)},$$

ou

$$\delta V = M\delta y + N \frac{\delta dy}{dx} + P \frac{d^2 y}{dx^2} + Q \frac{d^3 y}{dx^3} + \dots + U \frac{d^n y}{dx^n},$$

et, en transposant les signes δ et d ,

$$\delta V = M\delta y + N \frac{d\delta y}{dx} + P \frac{d^2 \delta y}{dx^2} + Q \frac{d^3 \delta y}{dx^3} + \dots + U \frac{d^n \delta y}{dx^n}.$$

Ainsi

$$(2) \quad \delta \int_{x_1}^{x_2} V dx = \int_{x_1}^{x_2} \left(M\delta y + N \frac{d\delta y}{dx} + P \frac{d^2 \delta y}{dx^2} + Q \frac{d^3 \delta y}{dx^3} + \dots + U \frac{d^n \delta y}{dx^n} \right) dx.$$

Maintenant, en intégrant par parties, on trouve

$$\int N \frac{d\delta y}{dx} dx = N\delta y - \int \delta y \frac{dN}{dx} dx,$$

$$\begin{aligned} \int P \frac{d^2 \delta y}{dx^2} dx &= P \frac{d\delta y}{dx} - \int \frac{dP}{dx} \frac{d\delta y}{dx} dx \\ &= P \frac{d\delta y}{dx} - \frac{dP}{dx} \delta y + \int \delta y \frac{d^2 P}{dx^2} dx, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int Q \frac{d^3 \delta y}{dx^3} dx &= Q \frac{d^2 \delta y}{dx^2} - \int \frac{dQ}{dx} \frac{d^2 \delta y}{dx^2} dx \\ &= Q \frac{d^2 \delta y}{dx^2} - \frac{dQ}{dx} \frac{d\delta y}{dx} + \frac{d^2 Q}{dx^2} \delta y - \int \delta y \frac{d^3 Q}{dx^3} dx, \end{aligned}$$

et, en général,

$$\begin{aligned} \int U \frac{d^n \delta y}{dx^n} dx &= U \frac{d^{n-1} \delta y}{dx^{n-1}} - \frac{dU}{dx} \cdot \frac{d^{n-2} \delta y}{dx^{n-2}} + \frac{d^2 U}{dx^2} \frac{d^{n-3} \delta y}{dx^{n-3}} - \dots \\ &\mp \frac{d^{n-1} U}{dx^{n-1}} \delta y \pm \int \delta y \frac{d^n U}{dx^n} dx. \end{aligned}$$

Substituant ces valeurs dans l'équation (2), et intégrant entre les limites x_1 et x_2 , on a donc pour la variation cherchée

ou, en remplaçant $\frac{dV}{dx}$, $\frac{dV}{dy}$, $\frac{dV}{dy'}$, ... respectivement par L, M, N, ...

$$dV = Ldx + Mdy + Ndy' + Pdy'' + Qdy''' + \dots$$

d'où

$$\delta V = L\delta x + M\delta y + N\delta y' + P\delta y'' + Q\delta y''' + \dots$$

c'est-à-dire

$$\delta V = L\delta x + M\delta y + N\delta p + P\delta q + Q\delta r + \dots$$

Substituant ces valeurs de dV et de δV dans l'expression entre parenthèses de l'équation (1), on aura donc

$$\begin{aligned} \delta \int_{x_1}^{x_2} V dx &= \left(V \delta x \right)_{x_1}^{x_2} \\ &+ \int_{x_1}^{x_2} \left[M(\delta y - p\delta x) + N(\delta p - q\delta x) + P(\delta q - r\delta x) + \dots \right] dx \end{aligned}$$

équation que l'on peut simplifier de la manière suivante

Posons

$$\delta y - p\delta x = \omega,$$

ω étant la différence γ_ε des deux ordonnées $m\gamma$, $m\varepsilon$ fig. (20), qui, dans les deux courbes AB, CD, correspondent à la même abscisse $x + \delta x$, puisque

$$\gamma_\varepsilon = \varepsilon_\varepsilon - \varepsilon_\gamma = \delta y - p\delta x.$$

En différentiant cette expression de ω , et appliquant pour cela à $p\delta x$ la règle des produits de deux variables, on trouvera

$$d\delta y - p\delta dx - d p \delta x = d\omega.$$

Mais $dy = p dx$; et en prenant les variations par la même règle que ci-dessus, on obtient

$$\delta dy = p\delta dx + dx\delta p$$

ou, en transposant les signes δ et d ,

$$d\delta y = p\delta dx + dx\delta p.$$

On a donc

$$dx \delta p - dp \delta x = d\omega$$

et, en remplaçant dp par sa valeur qdx ,

$$dx(\delta p - q\delta x) = d\omega.$$

Ainsi

$$(2) \quad \delta p - q\delta x = \frac{d\omega}{dx}.$$

On trouverait de même

$$\delta q - r\delta x = \frac{d^2\omega}{dx^2};$$

et, ainsi de suite.

On a donc

$$\begin{aligned} \delta \int_{x_1}^{x_2} V dx &= (V \delta x)_{x_1}^{x_2} \\ &+ \int_{x_1}^{x_2} \left[M\omega + N \frac{d^2\omega}{dx^2} + P \frac{d^3\omega}{dx^3} + Q \frac{d^4\omega}{dx^4} + \dots \right] dx. \end{aligned}$$

Maintenant si l'on intègre par parties tous les termes qui se trouvent renfermés dans le second membre, et qu'on prenne les intégrales entre x_1 et x_2 , on aura enfin pour l'expression de la variation cherchée

$$(3) \quad \delta \int_{x_1}^{x_2} V dx = \left[V \delta x + \left(N - \frac{dP}{dx} + \frac{d^2Q}{dx^2} \dots \right) \omega + \left(P - \frac{dQ}{dx} + \frac{d^2R}{dx^2} \dots \right) \frac{d\omega}{dx} + \left(Q - \frac{dR}{dx} \dots \right) \frac{d^2\omega}{dx^2} + \dots \right]_{x_1}^{x_2} + \int_{x_1}^{x_2} \omega \left(M - \frac{dN}{dx} + \frac{d^2P}{dx^2} - \frac{d^3Q}{dx^3} + \dots \right) dx.$$

CAS OU LA FONCTION V SOUS LE SIGNE $\int$ RENFERME PLUSIEURS FONCTIONS DE x , ET OU CETTE FONCTION DÉPEND DES LIMITES DE L'INTÉGRATION.

258. Considérons d'abord le cas où la fonction V , placée sous le signe de l'intégration, renferme deux fonctions y , z de x et leurs dérivées successives, et, par conséquent, où cette fonction est de la forme

$$V = F(x; y, y', y'', y''' \dots x, x', x'', x''' \dots).$$

Dans ce cas, la variation de $\int V dx$ s'obtiendra par un calcul semblable au précédent, et l'on aura

$$\begin{aligned} \delta \int_{x_1}^{x_2} V dx = & \int_{x_1}^{x_2} \left(M \delta y + N' \frac{d \delta y}{dx} + P \frac{d^2 \delta y}{dx^2} + Q \frac{d^3 \delta y}{dx^3} + \dots \right) dx \\ & + \int_{x_1}^{x_2} \left(M' \delta y + N' \frac{d \delta y}{dx} + P' \frac{d^2 \delta y}{dx^2} + Q' \frac{d^3 \delta y}{dx^3} + \dots \right) dx. \end{aligned}$$

En intégrant par parties, comme on l'a fait précédemment, on obtiendra pour la première intégrale l'expression (3), et pour la seconde une expression semblable, mais dans laquelle M , N , P , ... y seront remplacés par M' , N' , P' , et y par z . Faisant la somme de ces deux expressions, on aura donc la variation totale de l'intégrale cherchée.

Et l'on procéderait évidemment de la même manière si le nombre de fonctions renfermées dans V était plus considérable.

259. Supposons maintenant que la fonction V dépende des limites x , et x , de l'intégration. Dans ce cas, il faudra ajouter à la variation de l'intégrale les termes qui résultent de la variation de ces limites. Si l'on suppose, par exemple, que V ne

renferme qu'une seule fonction y de x , et soit par conséquent de la forme

$$V = F(x, y, y', y'' \dots),$$

alors les termes que l'on devra ajouter seront

$$\begin{aligned} & \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{dV}{dx_1} \delta x_1 + \frac{dV}{dy_1} \delta y_1 + \frac{dV}{dy'_1} \delta y'_1 + \frac{dV}{dy''_1} \delta y''_1 + \dots \right) dx \\ & + \int_{x_1}^{x_2} \left(\frac{dV}{dx_2} \delta x_2 + \frac{dV}{dy_2} \delta y_2 + \frac{dV}{dy'_2} \delta y'_2 + \frac{dV}{dy''_2} \delta y''_2 + \dots \right) dx; \end{aligned}$$

et comme les quantités $\delta x_1, \delta y_1, \dots, \delta x_2, \delta y_2, \dots$ peuvent être placées hors le signe $\int$, puisque ces quantités sont des constantes, il s'ensuit que les termes que l'on doit ajouter à la variation de l'intégrale pourront s'écrire ainsi

$$\begin{aligned} & \delta x_1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dV}{dx_1} dx + \delta y_1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dV}{dy_1} dx + \delta y'_1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dV}{dy'_1} dx + \dots \\ & + \delta x_2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dV}{dx_2} dx + \delta y_2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dV}{dy_2} dx + \delta y'_2 \int_{x_1}^{x_2} \frac{dV}{dy'_2} dx + \dots \end{aligned}$$

On agirait de la même manière si V contenait deux fonctions y, z de x , et leurs dérivées $y', y'', y''', \dots, z', z'', z'''$, relatives aux limites de l'intégration.

MAXIMUM ET MINIMUM D'UNE INTÉGRALE DÉFINIE.

260. Considérons le cas général où les limites x_1 et x_2 de l'intégrale définie $\int_{x_1}^{x_2} V dx$ sont variables, et proposons-nous de déterminer la fonction y de $x, y = F(x)$, qui rend cette intégrale un maximum ou un minimum.

D'après la théorie relative aux maxima et aux minima ordinaires, l'intégrale $\int_{x_1}^{x_2} V dx$ sera un maximum si la variation

de cette intégrale est constamment négative, et un minimum si cette variation est constamment positive; et, cela, quels que soient les signes et les valeurs des variations infiniment petites δx , δy . Il faudra donc que la variation soit nulle ou que l'on ait

$$(1) \quad \delta \int_{x_1}^{x_2} V dx = 0.$$

Cette condition est celle commune au maximum et au minimum. On distinguera ensuite le maximum du minimum au signe des termes du second degré, signe qui devra d'ailleurs être constant.

Or, en désignant par A la partie entre parenthèses de l'équation (5); par $\Lambda_{x_2} - \Lambda_{x_1}$, ce que devient cette expression quand on prend l'intégrale entre les limites x_1 et x_2 , et par B le facteur $\left(M - \frac{dN}{dx} + \frac{d^2P}{dx^2} - \frac{d^3Q}{dx^3} + \dots \pm \frac{d^n U}{dx^n}\right)$, l'équation de condition (1) se réduira à celle

$$(2) \quad \Lambda_{x_2} - \Lambda_{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} B \omega dx = 0,$$

et l'on aura

$$(3) \quad B = 0, \quad \Lambda_{x_2} - \Lambda_{x_1} = 0.$$

Car, ω étant une fonction arbitraire de x , et pouvant par là être prise de même signe que B pour toutes les valeurs de x comprises entre x_1 et x_2 , ou de signe contraire à B si $\Lambda_{x_2} - \Lambda_{x_1}$ est négative, il s'ensuit que la somme $\Lambda_{x_2} - \Lambda_{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} B \omega dx$ sera positive ou négative, mais non pas nulle, et qu'ainsi on devra avoir $B = 0$, et par suite aussi $\Lambda_{x_2} - \Lambda_{x_1} = 0$.

La première des équations (3) est dite *équation indéfinie*; elle a lieu pour tous les points de la courbe représentée par la fonction $y = F(x)$, et en intégrant cette équation différentielle qui est en général de l'ordre $2n$, puisque V renferme la dérivée n^{me} de y ou $y^{(n)}$ et que U peut renfermer $y^{(n)}$, on ob-

tiendra y en fonction de x et de n constantes arbitraires. Cette valeur y ou $F(x)$ sera celle qui rendra $\int_{x_1}^{x_2} V dx$ un maximum ou un minimum.

La seconde est l'équation aux limites; elle est relative effectivement aux deux limites de l'intégration, et doit être satisfaite par l'expression de y en x , qui donne la solution de la question proposée lorsqu'on donne à x les valeurs limites x_1 et x_2 . Cette équation, jointe à celle $B = 0$, sert à déterminer les constantes introduites par cette dernière.

261. Si V renfermait deux fonctions y, z de x , on suivrait une marche analogue à la précédente; on aurait alors

$$(4) \quad \delta \int_{x_1}^{x_2} V dx = (A_{x_2} - A_{x_1}) + (A'_{x_2} - A'_{x_1}) + \int_{x_1}^{x_2} (B\varpi + B'\varpi') dx = 0,$$

équation qui revient aux deux suivantes :

$$B = 0, \quad B' = 0, \quad [(A_{x_2} - A_{x_1}) + (A'_{x_2} - A'_{x_1})] = 0.$$

Les deux premières qui sont des équations simultanées font connaître y et z en fonction de x ; la troisième sert à déterminer les constantes introduites par l'intégration des deux premières.

262. Nous avons supposé dans ce qui précède que les fonctions y et z étaient indépendantes l'une de l'autre. Si ces fonctions sont liées entre elles par une relation

$$(1) \quad F(x, y, z) = 0,$$

alors les variations $\delta x, \delta y, \delta z$, ne seront plus indépendantes, et l'on devra avoir

$$\frac{dF}{dx} \delta x + \frac{dF}{dy} \delta y + \frac{dF}{dz} \delta z = 0.$$

Or, en remplaçant dans cette équation δy et δz par leurs valeurs

$$\delta y = y' \delta x + \varpi, \quad \delta z = z' \delta x + \varpi',$$

on trouve

$$\frac{dF}{dx} \delta x + \frac{dF}{dy} (y \delta x + \varpi) + \frac{dF}{dz} (z \delta x + \varpi') = 0$$

ou

$$\left(\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} y' + \frac{dF}{dz} z' \right) \delta x + \frac{dF}{dy} \varpi + \frac{dF}{dz} \varpi' = 0;$$

et, comme en différentiant l'équation (1) par rapport à x , on a

$$\frac{dF}{dx} + \frac{dF}{dy} y' + \frac{dF}{dz} z' = 0,$$

il en résulte

$$\varpi \frac{dF}{dy} + \varpi' \frac{dF}{dz} = 0$$

En tirant de cette équation la valeur de ϖ' qu'elle détermine, savoir :

$$\varpi' = - \frac{\frac{dF}{dy}}{\frac{dF}{dz}} \varpi,$$

et, portant cette valeur dans l'équation (4) du numéro précédent, on aura

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} V dx = [(A_{x_2} - A_{x_1}) + (A'_{x_2} - A'_{x_1})] + \int_{x_1}^{x_2} \left(B - B' \frac{\frac{dF}{dy}}{\frac{dF}{dz}} \right) \varpi dx.$$

Mais cette équation doit être nulle pour la condition du maximum ou du minimum. Donc, il faut que l'on ait

$$B \frac{dF}{dz} - B' \frac{dF}{dy} = 0, \quad [(A_{x_2} - A_{x_1}) - (A'_{x_2} + A'_{x_1})] = 0.$$

Ainsi, au moyen des équations

$$B \frac{dF}{dz} - B' \frac{dF}{dy} = 0, \quad \text{et} \quad F(x, y, z) = 0,$$

on déterminera y et z en fonction de x ; et l'équation

$$[(\Lambda_{x_2} - \Lambda_{x_1}) + (\Lambda'_{x_2} - \Lambda'_{x_1})] = 0$$

servira ensuite à déterminer les constantes introduites par les intégrations.

On voit par ce qui précède comment on devrait opérer si le nombre de fonctions de x qui entrent dans V était plus considérable, et si ces fonctions étaient liées entre elles par des équations données.

MAXIMUM ET MINIMUM RELATIF.

263. Proposons-nous maintenant de trouver le maximum ou le minimum d'une intégrale définie $\int_{x_1}^{x_2} V dx$ avec la condition qu'une autre intégrale définie $\int_{x_1}^{x_2} U dx$ conserve une valeur constante que nous désignerons par a , et qui est ce qu'on nomme un *maximum* ou un *minimum relatif*.

Dans ce cas, les variations des deux intégrales devront être nulles, et l'on aura en conséquence

$$(1) \quad \delta \int_{x_1}^{x_2} V dx = 0, \quad \delta \int_{x_1}^{x_2} U dx = 0.$$

équations de condition, qui, dans le cas général où les limites x_1 et x_2 sont variables, reviennent aux deux suivantes :

$$(2) \quad \Lambda_{x_2} - \Lambda_{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} B dx = 0,$$

$$(3) \quad \Lambda'_{x_2} - \Lambda'_{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} B' dx = 0,$$

Pour obtenir maintenant les conditions du maximum et du minimum propres au cas qui nous occupe, il nous faudra

d'abord éliminer ω entre les équations (2) et (5). Or, si l'on pose à cet effet

$$(4) \quad \int_{x_1}^{x_2} B' \omega dx = \varphi(x),$$

on aura immédiatement

$$\varphi(x_1) = 0, \quad \int_{x_1}^{x_2} B' \omega dx = 0,$$

et, portant cette valeur dans l'équation (3), il viendra

$$A'_{x_2} - A'_{x_1} + \varphi(x_2) = 0,$$

d'où

$$\varphi(x_2) = -(A'_{x_2} - A'_{x_1}).$$

Ainsi, $\varphi(x)$ sera une fonction arbitraire de x assujettie seulement à devenir nulle pour $x = x_1$, et à se réduire à $A'_{x_2} - A'_{x_1}$ pour $x = x_2$.

Or, on tire de l'équation (4)

$$B' \omega = \varphi'(x),$$

d'où

$$\omega = \frac{\varphi'(x)}{B'}.$$

et cette valeur portée dans l'équation (2) donne

$$A_{x_2} - A_{x_1} + \int_{x_1}^{x_2} \frac{B}{B'} \varphi'(x) dx = 0,$$

d'où en intégrant par parties, afin d'introduire $\varphi(x)$ au lieu de $\varphi'(x)$,

$$(5) \quad A_{x_2} - A_{x_1} - \left(\frac{B}{B'}\right)_2 (A'_{x_2} - A'_{x_1}) - \int_{x_1}^{x_2} \varphi(x) d\left(\frac{B}{B'}\right) = 0.$$

$\varphi(x)$ étant une fonction tout à fait arbitraire entre les valeurs données $x = x_1$, $x = x_2$, il faut donc que l'on ait

$$(6) \quad d\left(\frac{B}{B'}\right) = 0, \quad A_{x_2} - A_{x_1} - \left(\frac{B}{B'}\right)_2 (A'_{x_2} - A'_{x_1}) = 0,$$

équations qui donnent respectivement

$$(7) \quad B + \alpha B' = 0, \quad A_{x_2} - A_{x_1} + \alpha(A'_{x_2} - A'_{x_1}) = 0,$$

α désignant une constante.

La première de ces équations détermine y en fonction de x ; et quand on l'aura trouvée, les constantes arbitraires introduites par l'intégration seront déterminées par l'équation qui se rapporte aux limites. En substituant alors cette fonction ainsi déterminée dans $\int_{x_1}^{x_2} U dx = a$, on obtiendra la valeur de la constante a .

Remarquons, en terminant, que l'on serait parvenu au même résultat en cherchant le maximum absolu de l'intégrale définie

$$\int_{x_1}^{x_2} (V + \alpha U) dx.$$

CHAPITRE II.

APPLICATION DU CALCUL DES VARIATIONS A QUELQUES PROBLÈMES PARTICULIERS.

LIGNE LA PLUS COURTE ENTRE DEUX POINTS SUR UN PLAN.

264. Proposons-nous de trouver la ligne la plus courte que l'on puisse mener entre deux points A et B sur un plan. Soient x_1, y_1 , les coordonnées du point A, et x_2, y_2 , celles du point B. L'intégrale qu'il s'agit de rendre un minimum est dans ce cas

$$(1) \quad \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

et l'on doit avoir pour la condition du minimum

$$(2) \quad \delta \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{dx^2 + dy^2} = 0.$$

Or

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_1}^{x_2} \delta \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx d\delta x + dy d\delta y}{ds}.$$

Donc

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{ds} d\delta x + \int_{x_1}^{x_2} \frac{dy}{ds} d\delta y = 0.$$

D'ailleurs, en intégrant par parties, on a

$$\int \frac{dx}{ds} d\delta x = \frac{dx}{ds} \delta x - \int \delta x d \frac{dx}{ds}$$

$$\int \frac{dy}{ds} d\delta y = \frac{dy}{ds} \delta y - \int \delta y d \frac{dy}{ds},$$

Donc enfin

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \delta \int_{x_1}^{x_2} \sqrt{dx^2 + dy^2} &= \left(\frac{dx}{ds} \delta x + \frac{dy}{ds} \delta y \right)_2 - \left(\frac{dx}{ds} \delta x + \frac{dy}{ds} \delta x \right)_1 \\ &\quad - \int_{x_1}^{x_2} \left(\delta x d \frac{dx}{ds} + \delta y d \frac{dy}{ds} \right) = 0. \end{aligned} \right.$$

La partie sous le signe $\int$ représente l'équation de condition $B = 0$; et pour que cette équation soit nulle, il faut que l'on ait $d \frac{dx}{ds} = 0$ ou $d \frac{dy}{ds} = 0$. Soit donc

$$d \frac{dx}{ds} = 0;$$

on aura

$$\frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} = \text{const.}, \quad p = \frac{dy}{dx} = c,$$

et, par conséquent,

$$(4) \quad y = cx + c'.$$

Ainsi, comme il était facile de le prévoir, la ligne cherchée est une ligne droite.

265. Pour déterminer maintenant les constantes c et c' que renferme cette équation, il nous faut avoir égard aux conditions relatives aux points limites entre lesquels la ligne minimum doit être menée. Or, il se présente trois cas que nous allons examiner successivement.

1° Si les deux points A et B sont fixes, x_1, y_1, x_2, y_2 , seront constants; les variations $\delta x_1, \delta y_1, \delta x_2, \delta y_2$, de ces limites seront nulles, et l'équation aux limites $\Lambda_{x_2} - \Lambda_{x_1} = 0$

ou

$$\left(\frac{dx}{ds} \delta x + \frac{dy}{ds} \delta y \right)_2 - \left(\frac{dx}{ds} \delta x + \frac{dy}{ds} \delta y \right)_1 = 0$$

se trouvera satisfaite d'elle-même. Dans ce cas, les constantes c et c' se détermineront en assujettissant la droite représentée par l'équation (4) à passer par les points (x_1, y_1) , (x_2, y_2) , ou au moyen des équations

$$y_1 = cx_1 + c', \quad y_2 = cx_2 + c'.$$

2° Si les deux points $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, doivent être situés sur deux courbes données

$$y = \varphi(x), \quad y = \psi(x),$$

on aura

$$y_1 = \varphi(x_1), \quad y_2 = \psi(x_2),$$

d'où

$$\delta y_1 = \varphi'(x_1) \delta x_1, \quad \delta y_2 = \psi'(x_2) \delta x_2;$$

l'équation $\Lambda_{x_1} - \Lambda_{x_2} = 0$ deviendra

$$[dx_2 + dy_2 \psi'(x_2)] \delta x_2 - [dx_1 + dy_1 \varphi'(x_1)] \delta x_1 = 0,$$

et comme les variations δx_1 et δx_2 sont des quantités absolument indépendantes, cette équation se partagera dans les deux suivantes :

$$(5) \quad \begin{cases} 1 + \frac{dy_2}{dx_2} \psi'(x_2) = 0, \\ 1 + \frac{dy_1}{dx_1} \varphi'(x_1) = 0, \end{cases}$$

lesquelles expriment que la droite cherchée doit être normale à chacune des courbes données.

Ces équations (5) jointes à celles

$$\begin{aligned} y_1 &= cx_1 + c', & y_2 &= cx_2 + c', \\ y_1 &= \varphi(x_1), & y_2 &= \psi(x_2), \end{aligned}$$

détermineront les constantes c et c' et les coordonnées x_1, y_1, x_2, y_2 , des extrémités de la droite minimum.

3° Enfin, si l'un des points $A(x_1, y_1)$, seulement est fixe, et l'autre $B(x_2, y_2)$ assujéti à se trouver sur une courbe donnée

$$(6) \quad y = \varphi(x),$$

alors les variations des coordonnées qui se rapportent à ce point ou $\delta x_1, \delta y_1$, seront nulles, et l'équation $\Lambda_{x_1} - \Lambda_{y_1} = 0$ se réduira à celle

$$dx_1 \delta x_1 + dy_1 \delta y_1 = 0,$$

ou

$$1 + \frac{dy_1}{dx_1} \frac{\delta y_1}{\delta x_1} = 0, \quad \text{ou bien} \quad 1 + c\varphi'(x_1) = 0,$$

équation qui montre que la droite minimum (4) doit couper à angles droits la courbe proposée (6).

Pour déterminer les constantes c et c' et les coordonnées x_1, y_1 , du point extrême A, on aura donc les quatre équations

$$y_1 = cx_1 + c', \quad y_1 = cx_2 + c',$$

$$1 + c\varphi'(x_1) = 0, \quad y_1 = \varphi(x_1).$$

LIGNE LA PLUS COURTE ENTRE DEUX POINTS DANS L'ESPACE.

266. Supposons maintenant que les points A et B au lieu d'être dans un plan soient situés dans l'espace d'une manière quelconque, et cherchons la ligne la plus courte que l'on puisse mener entre ces points. Soient x_1, y_1, z_1 , les coordonnées du premier de ces points, et x_2, y_2, z_2 , celles du second. L'intégrale qu'il s'agit de rendre un minimum sera

$$\int_{x_1}^{x_2} dx \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2},$$

et l'on aura

$$Vdx = \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2} = ds,$$

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} Vdx = \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx d\delta x + dy d\delta y + dz d\delta z}{ds},$$

d'où en intégrant par parties

$$\begin{aligned} \delta \int_{x_1}^{x_2} V dx = & \left(\frac{dx}{ds} \delta x + \frac{dy}{ds} \delta y + \frac{dz}{ds} \delta z \right)_2 - \left(\frac{dx}{ds} \delta x + \frac{dy}{ds} \delta y + \frac{dz}{ds} \delta z \right)_1 \\ & - \int_{x_1}^{x_2} \left(\delta x d \frac{dx}{ds} + \delta y d \frac{dy}{ds} + \delta z d \frac{dz}{ds} \right). \end{aligned}$$

On aura donc

$$B = \delta x d \frac{dx}{ds} + \delta y d \frac{dy}{ds} + \delta z d \frac{dz}{ds} = 0.$$

Mais les variations δx , δy , δz , étant absolument indépendantes, cette équation se partage dans les trois suivantes :

$$d \frac{dx}{ds} = 0, \quad d \frac{dy}{ds} = 0, \quad d \frac{dz}{ds} = 0;$$

et si l'on suppose

$$d \frac{dy}{ds} = 0, \quad d \frac{dz}{ds} = 0,$$

on aura, en intégrant,

$$\frac{dy}{ds} = \text{const.}, \quad \frac{dz}{ds} = \text{const.},$$

ou

$$\frac{dy}{dx} = c, \quad \frac{dz}{dx} = c',$$

et par une autre intégration

$$(1) \quad y = cx + C, \quad z = c'x + C',$$

équations qui sont celles d'une ligne droite.

267. Pour déterminer maintenant les constantes c , C , c' , C' , il nous faut avoir égard aux conditions relatives aux limites. Or, il se présente trois cas que nous allons examiner successivement.

1° Si les deux points $A(x_1, y_1, z_1)$, et $B(x_2, y_2, z_2)$, sont fixes, les variations $\delta x_1, \delta y_1, \delta z_1, \delta x_2, \delta y_2, \delta z_2$, seront nulles, et l'équation $\Lambda_{x_1} - \Lambda_{x_2} = 0$, qui, dans ce cas, est

$$\left(\frac{dx}{ds} \delta x + \frac{dy}{ds} \delta y + \frac{dz}{ds} \delta z \right)_2 - \left(\frac{dx}{ds} \delta x + \frac{dy}{ds} \delta y + \frac{dz}{ds} \delta z \right)_1 = 0$$

sera satisfaite d'elle-même. On déterminera alors les constantes c, C, c', C' , en assujettissant la droite représentée par les équations (1) à passer par les points donnés A et B, ou au moyen des équations

$$\begin{aligned} y_1 &= cx_1 + C, & y_2 &= cx_2 + C, \\ z_1 &= c'x_1 + C', & z_2 &= c'x_2 + C'. \end{aligned}$$

2° Si les deux points $A(x_1, y_1, z_1)$ et $B(x_2, y_2, z_2)$ doivent être situés sur deux courbes dont

$$\begin{aligned} y &= \varphi(x), & z &= \psi(x), \\ y &= F(x), & z &= f(x) \end{aligned}$$

sont respectivement les équations, on aura

$$\begin{aligned} y_1 &= \varphi(x_1), & z_1 &= \psi(x_1), \\ y_2 &= F(x_2), & z_2 &= f(x_2), \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \delta y_1 &= \varphi'(x_1) \delta x_1, & \delta z_1 &= \psi'(x_1) \delta x_1, \\ \delta y_2 &= F'(x_2) \delta x_2, & \delta z_2 &= f'(x_2) \delta x_2, \end{aligned}$$

et l'équation $\Lambda_{x_1} - \Lambda_{x_2} = 0$ se réduira à celle

$$\begin{aligned} [dx_2 + dy_2 F'(x_2) + dz_2 f'(x_2)] \delta x_2 \\ - [dx_1 + dy_1 \varphi'(x_1) + dz_1 \psi'(x_1)] \delta x_1 = 0, \end{aligned}$$

qui, à cause de l'indépendance des quantités δx_1 et δx_2 , se réduit aux deux suivantes :

$$\begin{aligned} 1 + \frac{dy_2}{dx_2} F'(x_2) + \frac{dz_2}{dx_2} f'(x_2) &= 0, \\ 1 + \frac{dy_1}{dx_1} \varphi'(x_1) + \frac{dz_1}{dx_1} \psi'(x_1) &= 0, \end{aligned}$$

ou à celle

$$1 + cF'(x_2) + c'f'(x_2) = 0,$$

$$1 + c\varphi'(x_1) + c'\psi'(x_1) = 0,$$

et qui montrent que la droite cherchée est normale aux deux courbes.

Ces deux équations jointes à celles

$$y_1 = cx_1 + C, \quad y_2 = cx_2 + C$$

$$z_1 = c'x_1 + C', \quad z_2 = c'x_2 + C'$$

$$y_1 = \varphi(x_1), \quad z_1 = \psi(x_1),$$

$$y_2 = F(x_2), \quad z_2 = f(x_2),$$

détermineront les quatre constantes c, C, c', C' , et les six coordonnées extrêmes $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$, des points A et B.

3° Le cas où l'un des points A(x_1, y_1, z_1) est fixe, et l'autre assujéti à se trouver sur une courbe donnée

$$y = F(x), \quad z = f(x)$$

rentre dans le précédent; car alors les variations des coordonnées x_1, y_1, z_1 , qui se rapportent au point fixe A sont nulles, et l'équation $A_{x_2} - A_{x_1} = 0$ se réduit seulement à $A_{x_2} = 0$ ou

$$1 + \frac{dy_2}{dx_2} F'(x_2) + \frac{dz_2}{dx_2} f'(x_2) \\ = 1 + cF'(x_2) + c'f'(x_2) = 0,$$

en sorte que l'on a pour déterminer les quatre constantes c, C, c', C' , et les trois coordonnées du point extrême B(x_2, y_2, z_2), les sept équations

$$1 + cF'(x_2) + c'f'(x_2) = 0,$$

$$y_1 = cx_1 + c, \quad y_2 = cx_2 + c,$$

$$z_1 = c'x_1 + c', \quad z_2 = c'x_2 + c',$$

$$y_2 = F(x_2), \quad z_2 = f(x_2).$$

LIGNE MINIMUM TRACÉE SUR UNE SURFACE.

268. Proposons-nous maintenant de trouver la ligne la plus courte que l'on puisse tracer sur une surface donnée

$$(1) \quad F(x, y, z) = 0,$$

entre deux de ses points A et B.

On aura toujours

$$(2) \quad B = \delta x d \frac{dx}{ds} + \delta y d \frac{dy}{ds} + \delta z d \frac{dz}{ds} = 0,$$

et les variations δx , δy , δz , des coordonnées seront assujetties à satisfaire à l'équation différentielle de la surface, ou à

$$(3) \quad \frac{dF}{dx} \delta x + \frac{dF}{dy} \delta y + \frac{dF}{dz} \delta z = 0,$$

Or, si de cette équation on tire la valeur de δz , et qu'on porte cette valeur dans l'équation (2), celle-ci deviendra

$$\delta x \left(\frac{dF}{dz} d \frac{dx}{ds} - \frac{dF}{dx} d \frac{dz}{ds} \right) + \delta y \left(\frac{dF}{dz} d \frac{dy}{ds} - \frac{dF}{dy} d \frac{dz}{ds} \right) = 0,$$

équation qui se partage dans les deux suivantes, à cause de l'indépendance des variations δx et δy

$$(4) \quad \begin{cases} \frac{dF}{dz} d \frac{dx}{ds} - \frac{dF}{dx} d \frac{dz}{ds} = 0, \\ \frac{dF}{dz} d \frac{dy}{ds} - \frac{dF}{dy} d \frac{dz}{ds} = 0; \end{cases}$$

et en joignant l'une de ces équations à celle $F(x, y, z) = 0$ de la surface, on déterminera y et z en fonction de x .

Les constantes que renferment les équations de la courbe cherchée se détermineront comme dans le problème qui pré-

cède. Si les extrémités A et B de la ligne minimum au lieu d'être fixes sont assujetties à se trouver sur deux courbes données, on verra de même que cette ligne doit couper à angles droits les deux courbes données entre lesquelles elle est menée.

269. *Propriété géométrique de la ligne minimum.* — Les équations (4) expriment une propriété géométrique fort remarquable de la ligne minimum, et qui consiste en ce que le plan osculateur, en un point quelconque M de cette ligne, est constamment normal à la surface (1) sur laquelle elle est tracée.

En effet, la droite qui joint le point M avec le centre de courbure fait, avec les axes, des angles dont les cosinus sont proportionnels à

$$(5) \quad d \frac{dx}{ds}, \quad d \frac{dy}{ds}, \quad d \frac{dz}{ds},$$

et la normale à la surface au point M fait, avec les mêmes axes, des angles dont les cosinus sont proportionnels à

$$(6) \quad \frac{dF}{dx}, \quad \frac{dF}{dy}, \quad \frac{dF}{dz}.$$

Des équations (4), on déduit

$$\frac{d \frac{dx}{ds}}{\frac{dF}{dx}} = \frac{d \frac{dy}{ds}}{\frac{dF}{dy}} = \frac{d \frac{dz}{ds}}{\frac{dF}{dz}}.$$

Ainsi, les quantités (6) sont proportionnelles à celles (5); il en résulte que les angles formés avec les axes par les deux droites que nous venons de considérer sont égaux, en sorte que la normale à la surface au point M a même direction que le rayon de courbure en ce point. D'où l'on conclut que le plan osculateur au point M est constamment normal à la surface.

Les lignes minimum tracées sur une surface ont été nommées *lignes géodésiques*.

AIRE DE RÉVOLUTION MINIMUM.

270. Proposons-nous de trouver la courbe plane qui, passant par deux points donnés A et B, engendre, en tournant autour d'un axe CD situé dans son plan, une surface de révolution dont l'aire soit un minimum

Soient x_1, y_1 , les coordonnées du point A, et x_2, y_2 , celles du point B. La surface engendrée par la révolution de la courbe cherchée aura pour expression

$$2\pi \int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{dx^2 + dy^2},$$

et il s'agira de chercher le minimum de l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2} y \sqrt{dx^2 + dy^2}.$$

Or, en posant $\sqrt{dx^2 + dy^2} = ds$, on a

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} y ds = \int_{x_1}^{x_2} \delta(y ds) = \int_{x_1}^{x_2} (\delta y ds + y \delta ds),$$

ou parce que

$$\begin{aligned} \delta ds &= \frac{dx \delta x}{ds} + \frac{dy \delta y}{ds}, \\ \delta \int_{x_1}^{x_2} y ds &= \int_{x_1}^{x_2} \left(\delta y ds + y \frac{dx}{ds} \delta x + y \frac{dy}{ds} \delta y \right). \end{aligned}$$

Intégrant par parties, on trouve

$$\begin{aligned} \delta \int_{x_1}^{x_2} y ds &= \left(y \frac{dx}{ds} \delta x + y \frac{dy}{ds} \delta y \right) - \left(y \frac{dx}{ds} \delta x + y \frac{dy}{ds} \delta y \right), \\ &\quad - \int_{x_1}^{x_2} \left[\delta x d \left(y \frac{dx}{ds} \right) + \delta y d \left(y \frac{dy}{ds} \right) - \delta y ds \right]. \end{aligned}$$

Donc

$$B = \delta x d\left(y \frac{dx}{ds}\right) + \delta y d\left(y \frac{dy}{ds}\right) - \delta y ds = 0.$$

Cette équation revient aux deux suivantes :

$$d\left(y \frac{dx}{ds}\right) = 0, \quad ds - d\left(y \frac{dy}{ds}\right) = 0;$$

en considérant seulement la première qui est la plus simple, on a

$$y \frac{dx}{ds} = c,$$

d'où

$$y = c \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}}, \quad dx = \frac{cdy}{\sqrt{y^2 - c^2}},$$

et, en intégrant,

$$\frac{x-c'}{c} = l \left(\frac{y + \sqrt{y^2 - c^2}}{c} \right), \quad y + \sqrt{y^2 - c^2} = ce^{\frac{x-c'}{c}}.$$

On a donc

$$y = \frac{c}{2} \left(e^{\frac{x-c'}{c}} + e^{-\frac{x-c'}{c}} \right),$$

équation qui est celle d'une chaînette.

Les constantes c et c' se détermineront comme dans les exemples qui précèdent. Si les points $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, au lieu d'être fixes, étaient assujettis à se trouver sur deux courbes données, on obtiendrait une chaînette normale à ces deux courbes.

BRACHISTOCÉRÔNE.

271. On demande la courbe que doit suivre un corps pesant pour aller d'un point donné A à un autre point B dans le moindre

temps possible. Cette courbe est ce qu'on nomme la *brachistochrone*.

L'intégrale qu'il s'agit de rendre un minimum est ici

$$(1) \quad \int_{x_1}^{x_2} \frac{ds}{\sqrt{x-x_1}},$$

et l'on a pour la condition relative au minimum

$$(2) \quad \delta \int_{x_1}^{x_2} \frac{ds}{\sqrt{x-x_1}} = 0.$$

Or, en posant $X = \frac{1}{\sqrt{x-x_1}}$, on a

$$\delta \int X ds = \int (\delta X ds + X \delta ds).$$

Mais

$$\delta X = -\frac{1}{2} (x-x_1)^{-\frac{3}{2}} (\delta x - \delta x_1),$$

et

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

d'où

$$\delta ds = \frac{dx}{ds} \delta x + \frac{dy}{ds} \delta y + \frac{dz}{ds} \delta z.$$

On a donc

$$\begin{aligned} \delta \int X ds &= \delta x_1 \int \frac{1}{2} (x-x_1)^{-\frac{3}{2}} ds \\ &\quad - \int \left[\frac{1}{2} (x-x_1)^{-\frac{3}{2}} \delta x ds - X \left(\frac{dx}{ds} \delta x + \frac{dy}{ds} \delta y + \frac{dz}{ds} \delta z \right) \right], \end{aligned}$$

et en intégrant par parties, entre les limites x_1 et x_2 ,

$$\begin{aligned} \delta \int_{x_1}^{x_2} X dx &= \\ &\left[X \left(\frac{dx}{ds} \delta x + \frac{dy}{ds} \delta y + \frac{dz}{ds} \delta z \right) \right]_{x_1}^{x_2} - \left[X \left(\frac{dx}{ds} \delta x + \frac{dy}{ds} \delta y + \frac{dz}{ds} \delta z \right) \right]_{x_1}^{x_2} \\ &\quad + \frac{1}{2} \delta x_1 \int_{x_1}^{x_2} (x-x_1)^{-\frac{3}{2}} ds \\ &\quad - \int_{x_1}^{x_2} \left[\delta x d \left(X \frac{dx}{ds} \right) + \delta y d \left(X \frac{dy}{ds} \right) + \delta z d \left(X \frac{dz}{ds} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \delta x (x-x_1)^{-\frac{3}{2}} ds \right] = 0. \end{aligned}$$

La quantité qui se trouve placée sous le signe $\int$, dans la dernière intégrale, représente l'équation de condition $B = 0$, et donne

$$(5) \quad \frac{1}{2} (x - x_1)^{-\frac{3}{2}} ds + d \left(X \frac{dx}{ds} \right) = 0,$$

$$(4) \quad d \left(X \frac{dy}{ds} \right) = 0, \quad d \left(X \frac{dz}{ds} \right) = 0;$$

les deux dernières de ces équations suffisent pour déterminer la courbe, car on en tire

$$X \frac{dy}{ds} = C, \quad X \frac{dz}{ds} = C',$$

d'où, en remettant pour X sa valeur,

$$(5) \quad \frac{1}{\sqrt{x - x_1}} \frac{dy}{ds} = C, \quad \frac{1}{\sqrt{x - x_1}} \frac{dz}{ds} = C',$$

c'est-à-dire

$$\frac{dy}{dz} = \frac{C}{C'},$$

en sorte que

$$(6) \quad y = \frac{C}{C'} z + C'',$$

équation qui montre que la courbe cherchée est comprise dans un plan vertical. Pour en déterminer la nature, supposons que ce plan se confonde avec celui des xy ; alors on aura $z = 0$, et il ne restera que l'équation

$$\frac{1}{\sqrt{x - x_1}} \frac{dy}{ds} = C,$$

qui revient à la suivante :

$$dy = \frac{dx \sqrt{x - x_1}}{\sqrt{\frac{1}{C^2} - (x - x_1)}}.$$

Or, cette équation est celle d'un cycloïde; car, en posant $x - x_1 = x$, on en déduit

$$dy = dx \sqrt{\frac{x}{\frac{1}{C^2} - x}}.$$

Si l'on suppose maintenant que les deux points extrêmes $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$, au lieu d'être fixes, soient assujettis à se trouver sur deux courbes données c_1 et c_2 , on obtiendra encore une cycloïde qui sera contenue dans un plan vertical. Pour en déterminer les points extrêmes A et B, il nous faudra avoir égard à l'équation aux limites $A_x, -A_{x_1} = 0$, qui est ici

$$\left[X \left(\frac{dx}{ds} \delta x + \frac{dy}{ds} \delta y + \frac{dz}{ds} \delta z \right) \right]_2 - \left[X \left(\frac{dx}{ds} \delta x + \frac{dy}{ds} \delta y + \frac{dz}{ds} \delta z \right) \right]_1 + \delta x_1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{ds}{(x - x_1)^{\frac{3}{2}}} = 0;$$

et comme les variations des points extrêmes sont indépendantes l'une de l'autre, on aura d'abord

$$(7) \quad A_{x_1} = 0, \quad \text{ou} \quad \left[X \left(\frac{dx}{ds} \delta x + \frac{dy}{ds} \delta y + \frac{dz}{ds} \delta z \right) \right]_2 = 0,$$

équation qui exprime que la tangente à la courbe au point A est perpendiculaire à la tangente au même point de la courbe c_2 , ou que la cycloïde coupe la courbe c_2 à angles droits.

On aura ensuite

$$(8) \quad \left[X \left(\frac{dx}{ds} \delta x + \frac{dy}{ds} \delta y + \frac{dz}{ds} \delta z \right) \right]_1 + \delta x_1 \int_{x_1}^{x_2} \frac{ds}{(x - x_1)^{\frac{3}{2}}} = 0;$$

et comme pour tous les points de la courbe on doit avoir, d'après l'équation (3),

$$\frac{dx}{ds} d \left(X \frac{dx}{ds} \right) + \frac{1}{2} \frac{dx}{(x - x_1)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

ou

$$d\left(X \frac{dx}{ds}\right) + \frac{1}{2} \frac{ds}{(x-x_1)^{\frac{3}{2}}} = 0,$$

d'où

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{1}{2} \frac{ds}{(x-x_1)^{\frac{3}{2}}} = -\left(X \frac{dx}{ds}\right)_2 + \left(X \frac{dx}{ds}\right)_1,$$

cette équation deviendra

$$(9) \quad \left(X \frac{dx}{ds}\right)_2 \delta x_1 + \left(X \frac{dy}{ds}\right)_1 \delta y_1 + \left(X \frac{dz}{ds}\right)_1 \delta z_1 = 0.$$

On peut donner à cette dernière équation une forme plus symétrique en remplaçant dans les coefficients de δy_1 et δz_1 , l'indice 1 par l'indice 2, ce qui est permis, puisque l'on a encore pour tous les points de la courbe

$$X \frac{dy}{ds} = C, \quad X \frac{dz}{ds} = C',$$

et, par conséquent,

$$\begin{aligned} \left(X \frac{dy}{ds}\right)_2 &= \left(X \frac{dy}{ds}\right)_1, \\ \left(X \frac{dz}{ds}\right)_2 &= \left(X \frac{dz}{ds}\right)_1. \end{aligned}$$

On aura donc

$$(10) \quad \left(X \frac{dx}{ds}\right)_2 \delta x_1 + \left(X \frac{dy}{ds}\right)_2 \delta y_1 + \left(X \frac{dz}{ds}\right)_2 \delta z_1 = 0.$$

équation qui montre que la tangente à la courbe cherchée au point B, est perpendiculaire à la tangente menée par le point A à la courbe c_1 .

Les quatre constantes introduites par l'intégration des équations (10), et les six coordonnées $x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2$, des points extrêmes se détermineront comme dans les exemples qui précèdent.

PROBLÈMES RELATIFS AUX ISOPÉRIMÈTRES.

272. Cherchons maintenant la courbe qui, sous un contour donné, renferme la plus grande ou la plus petite aire possible.

Il s'agit de rendre maximum ou minimum la valeur de l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2} y dx$$

avec la condition

$$\int_{x_1}^{x_2} \sqrt{dx^2 + dy^2} = l.$$

Or, d'après la théorie du n° (265), il faudra chercher le maximum absolu de l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2} (y dx + a \sqrt{dx^2 + dy^2}),$$

c'est-à-dire poser

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} (y dx + a \sqrt{dx^2 + dy^2}) = 0;$$

et en faisant $\sqrt{dx^2 + dy^2} = ds$, et appliquant les notions qui ont été présentées dans le n° (260), on trouvera

$$B = \left(dy + ad \frac{dx}{ds} \right) \delta x - \left(dx - ad \frac{dy}{ds} \right) \delta y = 0,$$

équation qui se partage dans les deux suivantes :

$$dy + ad \frac{dx}{ds} = 0, \quad dx - ad \frac{dy}{ds} = 0.$$

La première suffit pour déterminer la courbe cherchée, et donne par l'intégration

$$y + a \frac{dx}{ds} = C'.$$

On tire de là, en remplaçant ds par sa valeur $\sqrt{dx^2 + dy^2}$,

$$dx = \frac{(y - c')dy}{\sqrt{a^2 - (y - c')^2}},$$

d'où

$$x - c = \sqrt{a^2 - (y - c')^2},$$

t, par conséquent,

$$(x - c)^2 + (y - c')^2 = a^2,$$

équation d'un cercle de rayon a . Ainsi, la courbe cherchée est un arc de cercle.

273. Si l'on demandait la courbe qui, sous un périmètre donné, et en tournant autour d'une droite Ox , engendre la plus grande aire de révolution, il faudrait alors chercher le maximum relatif de l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2} y ds,$$

avec la condition

$$\int_{x_1}^{x_2} ds = l,$$

ou, ce qui revient au même, le maximum absolu de l'intégrale

$$\int_{x_1}^{x_2} (y + a) ds.$$

On devrait donc poser

$$\delta \int_{x_1}^{x_2} (y + a) ds = 0,$$

ou, puisque a est une constante,

$$\delta \int y ds = 0.$$

Le problème a été résolu n° (270), et donne

$$y = \frac{c}{2} \left(e^{\frac{x-c'}{c}} + e^{-\frac{x-c'}{c}} \right),$$

équation de la chaînette.

LIVRE V.

CALCUL DES DIFFÉRENCES FINIES.

CHAPITRE PREMIER

CALCUL DIRECT DES DIFFÉRENCES.

FORMATION DES DIFFÉRENCES SUCCESSIVES.

274. Soit

$$u = F(x)$$

une fonction quelconque de x ; et considérons les valeurs que prend cette fonction u quand on attribue à la variable x , dont elle dépend, une série de valeurs déterminées

$$x_0, x_1, x_2, x_3 \dots x_{n-1}, x_n.$$

Soient

$$(1) \quad u_0, u_1, u_2, u_3, \dots, u_{n-1}, u_n$$

les valeurs correspondantes de u . En retranchant chacune de ces valeurs de celle qui la suit immédiatement, on obtient ce qu'on nomme les *différences premières* de ces valeurs. On représente ces différences par les notations $\Delta u_0, \Delta u_1, \Delta u_2, \dots, \Delta u_n$; ainsi, l'on écrit

$$(2) \quad \left\{ \begin{array}{l} u_1 - u_0 = \Delta u_0, \\ u_2 - u_1 = \Delta u_1, \\ u_3 - u_2 = \Delta u_2, \\ \dots \dots \dots \\ u_n - u_{n-1} = \Delta u_{n-1}. \end{array} \right.$$

De même, si l'on considère la suite des différences premières

$$\Delta u_0, \Delta u_1, \Delta u_2, \dots \Delta u_{n-1}, \Delta u_n,$$

et qu'on retranche, comme nous venons de le faire, chacune de ces différences de celle qui la suit immédiatement, on obtiendra, en désignant par $\Delta^2 u_1, \Delta^2 u_2, \dots \Delta^2 u_{n-1}, \Delta^2 u_n$ les nouvelles différences qui en résultent,

$$(3) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta u_1 - \Delta u_0 = \Delta^2 u_0, \\ \Delta u_2 - \Delta u_1 = \Delta^2 u_1, \\ \Delta u_3 - \Delta u_2 = \Delta^2 u_2, \\ \dots \dots \dots \\ \Delta u_n - \Delta u_{n-1} = \Delta^2 u_{n-1}, \end{array} \right.$$

différences qui sont nommées les *différences secondes*. Ces différences sont, comme on le voit, les différences des différences premières. En continuant de la sorte, on formera les différences troisièmes au moyen des différences secondes; les différences quatrièmes au moyen des différences troisièmes; et, ainsi de suite. De là résulte pour la formation des différences successives la formule générale

$$(4) \quad \Delta^{(n-1)} u_n - \Delta^{(n-1)} u_{n-1} = \Delta^{(n)} u_{(n-1)}.$$

DÉVELOPPEMENT DES EXPRESSIONS DE $\Delta^n u$ ET DE u_n .

275. On peut exprimer immédiatement la différence $\Delta^n u$ au moyen des termes $u_0, u_1, u_2, \dots u_{n-1}, u_n$ de la série (1).

En effet, on a d'abord

$$\Delta u = u_1 - u, \quad \Delta u_1 = u_2 - u_1,$$

et comme

$$\Delta^2 u = \Delta u_1 - \Delta u,$$

il en résulte

$$\Delta^2 u = u_2 - 2u_1 + u.$$

On a pareillement

$$\Delta^3 u_1 = u_3 - 2u_2 + u_1,$$

et parce que

$$\Delta^2 u = \Delta^2 u - \Delta u_1,$$

$$\Delta^3 u = u_3 - 3u_2 + 3u_1 + u.$$

On trouvera de même

$$\Delta^4 u = u_4 - 4u_3 + 6u_2 - 4u_1 + u,$$

et, ainsi de suite. En se laissant conduire par l'analogie, on aura donc

$$(1) \quad \Delta^n u = u_n - n u_{n-1} + \frac{n(n-1)}{1.2} u_{n-2} - \dots \pm u,$$

formule que l'on peut écrire symboliquement

$$\Delta^n u = (u-1)^n$$

en se réservant de changer, après le développement, $u^0, u^1, u^2, \dots, u^n$, en $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$.

Pour démontrer la généralité de cette formule, il suffit de faire voir que si elle a lieu pour l'indice n , elle a encore lieu pour l'indice $n+1$. Or, si l'on pose

$$\Delta^n u = u_n - Au_{n-1} + Bu_{n-2} - Cu_{n-3} + \dots \pm u,$$

on aura également

$$\Delta^n u_1 = u_{n+1} - Au_n + Bu_{n-1} - Cu_{n-2} + \dots \pm u_1,$$

et comme $\Delta^n u_1 - \Delta^n u = \Delta^{n+1} u$, il en résulte

$$\Delta^{n+1} u = u_{n+1} - A \left| \begin{array}{c} u_n + B \\ -1 \end{array} \right| + \Lambda \left| \begin{array}{c} u_{n-1} - C \\ -B \end{array} \right| + \dots \pm u.$$

Donc, la formule (1) supposée vraie pour l'indice n l'est encore pour l'indice $n + 1$; d'où l'on peut conclure qu'elle est générale.

276. Nous venons d'exprimer $\Delta^n u$ en fonction de $u, u_1, u_2, \dots u_n$. Or, réciproquement, on peut se proposer d'exprimer u_n en fonction de u et de ses n différences successives $\Delta u, \Delta^2 u, \dots \Delta^n u$. En effet, on a

$$\begin{aligned} u_1 &= u + \Delta u, \\ u_2 &= u_1 + \Delta u_1, \end{aligned}$$

et parce que

$$\begin{aligned} \Delta u_1 &= \Delta(u + \Delta u) = \Delta u + \Delta^2 u, \\ u_2 &= u + 2\Delta u + \Delta^2 u. \end{aligned}$$

Par des substitutions semblables aux précédentes, on trouvera

$$\begin{aligned} u_3 &= u + 3\Delta u + 3\Delta^2 u + \Delta^3 u, \\ u_4 &= u + 4\Delta u + 6\Delta^2 u + 4\Delta^3 u + \Delta^4 u, \end{aligned}$$

et, ainsi de suite. En général, on aura donc

$$(2) \quad u_n = u + n\Delta u + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta^2 u + \dots + \Delta^n u,$$

ou sous une forme symbolique

$$u_n = (1 + \Delta)^n u,$$

$(\Delta u)^n$ devant être changé, après le développement, en $\Delta^n u$.

DIFFÉRENTIATION DES FONCTIONS.

277. Considérons, en premier lieu, la fonction entière et rationnelle de degré m

$$u = Ax^m + Bx^{m-1} + Cx^{m-2} + \dots + Kx + L,$$

dans laquelle $A, B, C, \dots L$ et m sont des quantités constantes.

La différence Δu de cette fonction sera égale à la somme des différences de ses termes, et en appliquant la formule

$$\Delta u = F(x + \Delta x) - F(x),$$

qui fait connaître l'accroissement d'une fonction d'après l'accroissement de sa variable, on aura

$$\begin{aligned} \Delta u = & A[(x + \Delta x)^m - x^m] \\ & + B[(x + \Delta x)^{m-1} - x^{m-1}] \\ & + C[(x + \Delta x)^{m-2} - x^{m-2}] \\ & + \dots + K\Delta x. \end{aligned}$$

En développant chaque binôme, et ordonnant, on trouve

$$\Delta u = mA\Delta x x^{m-1} + B_1x^{m-2} + C_1x^{m-3} + \dots + K_1.$$

On a de même

$$\begin{aligned} \Delta^2 u &= m(m-1)A\Delta x^2 x^{m-2} + B^2x^{m-3} + \dots + I_2, \\ \Delta^3 u &= m(m-1)(m-2)A\Delta x^3 x^{m-3} + B_2x^{m-4} + \dots + H_3, \end{aligned}$$

et, ainsi de suite. Après m différentiations, on aura donc

$$(1) \quad \Delta^m u = m(m-2)(m-2) \dots 2.1 A \Delta x^m.$$

Cette différence étant constante, il s'ensuit que celles des ordres supérieurs seront nulles.

278. Soit, en second lieu, $u = x^n$. On aura

$$u_1 = (x + \Delta x)^n, \quad u_2 = (x + 2\Delta x)^n \dots u_m = (x + m\Delta x)^n,$$

et la formule (2) donnera

$$\begin{aligned} \Delta^m u = & (x + m\Delta x)^n - m[x + (m-1)\Delta x]^n + \frac{m(m-1)}{1.2} [x + (m-2)\Delta x]^n \dots \\ & \mp m(x + \Delta x)^n \pm x^n. \end{aligned}$$

Si $m = n$, on aura

$$(2) \quad 1.2.3 \dots n \Delta x^n = (x + m \Delta x)^n - m[x + (m-1)\Delta x]^n + \dots \pm m(\Delta x + x)^n \pm x^n,$$

et si, dans ce cas, on fait $x = 0$, il viendra

$$(3) \quad n^n - n(n-1)^n + \frac{n(n-1)}{1.2} (n-2)^n - \dots \pm n = 1.2.3 \dots n.$$

Si l'on suppose $m < n$, alors $\Delta^n u = 0$, et en faisant encore $x = 0$, on obtiendra

$$(4) \quad m^n - m(m-1)^n + \frac{m(m-1)}{1.2} (m-2)^n + \dots \pm m = 0.$$

279. Considérons maintenant le produit

$$u = (x + \Delta x)(x + 2\Delta x) \dots [x + (n-1)\Delta x]$$

composé de n facteurs croissant par degrés égaux à Δx . On aura

$$\Delta u = (x + \Delta x)(x + 2\Delta x) \dots [x + (n-1)\Delta x] n \Delta x,$$

$$\Delta^2 u = (x + 2\Delta x) \dots [x + (n-1)\Delta x] n(n-1) \Delta x^2;$$

et, ainsi de suite. En-général, on aura donc

$$\Delta^n u = (n-1)(n-2) \dots 2.1 \Delta x^n.$$

280. Pour

$$u = \frac{1}{(x + \Delta x)(x + 2\Delta x) \dots [x + (n-1)\Delta x]},$$

on a

$$\Delta u = \frac{-\Delta n x}{x(x + \Delta x)(x + 2\Delta x) \dots (x + n\Delta x)},$$

$$\frac{n(n+1)\Delta x^2}{x(x + \Delta x) \dots [x + (n+1)\Delta x]},$$

et, ainsi de suite.

281. Soit

$$u = a^x;$$

on aura

$$\Delta u = a^{x+\Delta x} - a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1),$$

$$\Delta^2 u = a^x(a^{\Delta x} - 1)^2,$$

$$\Delta^3 u = a^x(a^{\Delta x} - 1)^3,$$

et généralement

$$\Delta^m u = a^x(a^{\Delta x} - 1)^m.$$

282. Soit enfin

$$u = \sin(ax + b);$$

on aura

$$\Delta u = \sin(ax + a\Delta x + b) - \sin(ax + b)$$

$$= 2 \sin \frac{a\Delta x}{2} \cos \left(ax + \frac{a\Delta x}{2} + b \right).$$

On aurait de même pour $u = \cos(ax + b)$

$$\Delta u = \cos(ax + a\Delta x + b) - \cos(ax + b)$$

$$= -2 \sin \frac{a\Delta x}{2} \sin \left(ax + \frac{a\Delta x}{2} + b \right).$$

Au moyen de ces deux formules, on trouve

$$\Delta^2 \sin(ax + b) = -4 \sin^2 \frac{a\Delta x}{2} \sin(ax + a\Delta x + b).$$

CHAPITRE II.

CALCUL INVERSE DES DIFFÉRENCES.

DÉFINITIONS ET NOTATIONS.

283. Le calcul inverse des différences a pour objet de déterminer une fonction, étant donnée sa différence, ou plus généralement étant donnée une relation entre cette fonction, ses dérivées des divers ordres et la variable dont elle dépend.

Soit $F(x)$ une fonction dont la différence est $f(x)$, on aura par définition

$$\Delta F(x) = f(x),$$

ou

$$F(x + \Delta x) - F(x) = f(x),$$

et cette fonction $F(x)$ sera dite l'intégrale aux différences finies de $f(x)$. On représente cette intégrale par la caractéristique $\sum$ que l'on place au devant de $f(x)$; ainsi, l'on écrit

$$\sum f(x) = F(x).$$

Les signes Δ et $\sum$ indiquant des opérations inverses, ces signes devront se détruire lorsqu'ils se trouveront placés au devant de la même fonction variable. Ainsi l'on a

$$\Delta \sum f(x) = f(x), \quad \sum \Delta f(x) = f(x).$$

Dans le calcul différentiel, les quantités qui disparaissent par la différentiation sont absolument constantes. Dans le calcul aux différences finies, il suffit pour qu'une quantité s'annule, lorsqu'on prend les différences, que cette quantité conserve la même valeur quand on passe de x à $x + \Delta x$. Il en résulte que lorsqu'on remonte des différences aux fonctions, ce n'est pas une constante arbitraire que l'on doit ajouter à l'intégrale particulière pour avoir la solution la plus générale de la question, mais bien une fonction arbitraire jouissant de la propriété de demeurer constante quand on passe de x à $x + \Delta x$. $\varphi(x)$ étant une fonction jouissant de cette propriété, on aura donc

$$\sum f(x) = F(x) + \varphi(x),$$

et l'on pourra prendre, par exemple, pour $\varphi(x)$, la fonction

$$\varphi(x) = \psi \left(\sin \frac{2\pi x}{\Delta x}, \cos \frac{2\pi x}{\Delta x} \right),$$

ψ étant tout à fait arbitraire.

Cette fonction $\varphi(x)$ que l'on nomme une *fonction périodique* de x peut être représentée géométriquement par l'ordonnée d'une courbe plane. En effet, si par les points P, Q, R, ... fig. (21), pris sur la ligne Ox, et distants les uns des autres d'une quantité Δx égale à la période de la fonction, on élève des perpendiculaires égales PA, QB, RC; puis que par les extrémités A, B, C de ces lignes, on fasse passer des arcs égaux AMB, BCN, CED, ... on aura une courbe AMBNC... formée par la réunion de tous ces arcs et dont l'ordonnée PA jouira de la propriété de reprendre la même valeur PA = QB = RC... lorsque OP = x augmentera de la quantité PQ = Δx . Cette courbe AMBNC... représentera, par conséquent, la fonction périodique cherchée $\varphi(x)$.

284. THÉORÈME. Si l'on considère une suite de valeurs de x

$$x, x_1, x_2, x_3, \dots, x_{n-1}, x_n$$

croissant par intervalles constants et égaux à Δx , et par conséquent telles que

$$\begin{aligned}x_1 &= x_0 + \Delta x, \\x_2 &= x_1 + \Delta x, \\&\dots\dots\dots \\x_n &= x_{n-1} + \Delta x,\end{aligned}$$

on aura

$$\begin{aligned}F(x_1) - F(x_0) &= f(x_0), \\F(x_2) - F(x_1) &= f(x_1), \\F(x_3) - F(x_2) &= f(x_2), \\&\dots\dots\dots \\F(x_n) - F(x_{n-1}) &= f(x_{n-1}),\end{aligned}$$

d'où l'on déduit

$$F(x_n) - F(x_0) = f(x_0) + f(x_1) + f(x_2) + \dots + f(x_{n-1}).$$

Ce théorème est analogue à celui du n° (6).

INTÉGRATION DES FONCTIONS.

285. Soit, en premier lieu, la fonction x^m ; et cherchons $\sum x^m$. On a

$$\Delta x^{m+1} = (m+1)x^m(\Delta x) + \frac{(m+1)(m)}{1.2} x^{m-1}(\Delta x)^2 + \dots + (\Delta x)^{m+1},$$

formule qui donne, en prenant l'intégrale de chaque membre,

$$\begin{aligned}x^{m+1} &= m+1 \sum x^m \Delta x + \frac{(m+1)(m)}{1.2} \sum x^{m-1}(\Delta x)^2 + \\&+ \frac{(m+1)m(m-1)}{1.2.3} \Delta x^3 \sum x^{m-2} + \dots + \Delta x^{m+1} \sum x_0.\end{aligned}$$

On déduit de là

$$(1) \left\{ \begin{aligned} \sum x^m &= \frac{x^{m+1}}{(m+1)\Delta x} - \frac{m\Delta x}{1.2} \sum x^{m-1} \\ &\quad - \frac{m(m-1)\Delta x^2}{1.2.3} \sum x^{m-2} - \dots - \frac{\Delta x^m}{m+1} \sum x_0, \end{aligned} \right.$$

et, en faisant successivement dans cette dernière $m=0, m=1, m=2$, etc., on trouve, pour calculer $\sum x^0, \sum x^1, \sum x^2$, etc.

$$(a) \quad \left\{ \begin{array}{l} \sum x^0 = \frac{x}{\Delta x} + C, \\ \sum x^1 = \frac{x^2}{2\Delta x} - \frac{1}{2}x + C, \\ \sum x^2 = \frac{x^3}{3\Delta x} - \frac{1}{2}x^2 + \frac{\Delta x}{6}x + C, \\ \sum x^3 = \frac{x^4}{4\Delta x} - \frac{1}{2}x^3 + \frac{\Delta x}{4}x^2 + C, \\ \sum x^4 = \frac{x^5}{5\Delta x} - \frac{1}{2}x^4 + \frac{\Delta x}{3}x^3 - \frac{\Delta x^2}{30}x + C, \\ \dots \end{array} \right.$$

C désignant une fonction périodique.

286. Considérons maintenant la fonction a^x . On a trouvé, n° (281),

$$\Delta a^x = a^x(a^{\Delta x} - 1).$$

Intégrant, on a donc

$$\sum a^x = \frac{a^x}{a^{\Delta x} - 1} + C,$$

d'où l'on déduit

$$\begin{aligned} \sum^1 a^x &= \frac{a^x}{(a^{\Delta x} - 1)^2} + \sum C, \\ \sum^2 a^x &= \frac{a^x}{(a^{\Delta x} - 1)^3} + \sum^2 C, \\ &\dots \dots \dots \\ \sum^n a^x &= \frac{a^x}{(a^{\Delta x} - 1)^{n+1}} + \sum^{n+1} C. \end{aligned}$$

Quant aux expressions $\sum C, \sum^2 C, \dots, \sum^{n+1} C$, qui terminent

ces intégrales, elles se détermineront facilement au moyen des équations (2).

287. En considérant la fonction

$$x(x + \Delta x)(x + 2\Delta x) \dots (x + n\Delta x),$$

nous avons trouvé, n° (279), pour la différence de cette fonction,

$$\begin{aligned} \Delta[x(x + \Delta x)(x + 2\Delta x) \dots (x + n\Delta x)] \\ = (x + \Delta x)(x + 2\Delta x) \dots (x + \Delta x)(n + 1)\Delta x. \end{aligned}$$

Nous aurons donc, en intégrant,

$$\begin{aligned} \sum [x(x + \Delta x)(x + 2\Delta x) \dots (x + n\Delta x)] \\ = \frac{x(x + \Delta x) \dots (x + n\Delta x + \Delta x)}{(n + 1)\Delta x}. \end{aligned}$$

288. D'après le n° (280), on a également

$$\begin{aligned} \Delta \left[\frac{1}{x(x + \Delta x)(x + 2\Delta x) \dots (x + n\Delta x)} \right] \\ = \frac{-(n + 1)\Delta x}{x(x + \Delta x)(x + 2\Delta x) \dots [x + (n + 1)\Delta x]}. \end{aligned}$$

Donc, en intégrant,

$$\begin{aligned} \sum \left[\frac{1}{x(x + \Delta x)(x + 2\Delta x) \dots [x + (n + 1)\Delta x]} \right] \\ = \frac{-1}{(n + 1)\Delta x \cdot x(x + \Delta x) \dots (x + n\Delta x)} + C. \end{aligned}$$

289. A l'égard de $\sin(ax + b)$, nous avons trouvé

$$\Delta \sin(ax + b) = 2 \sin \frac{a\Delta x}{2} \cos \left(ax + \frac{a\Delta x}{2} + b \right).$$

En remplaçant $x + \frac{\Delta x}{2}$ par x , et intégrant, nous aurons donc

$$\sum \sin(ax+b) = -\frac{\cos\left(ax+b-\frac{a\Delta x}{2}\right)}{2 \sin \frac{a\Delta x}{2}} + C.$$

On a également

$$\Delta \cos(ax+b) = -2 \sin \frac{a\Delta x}{2} \sin\left(ax + \frac{a\Delta x}{2} + b\right),$$

et, par conséquent,

$$\sum \cos(ax+b) = \frac{\sin\left(ax+b-\frac{a\Delta x}{2}\right)}{2 \sin \frac{a\Delta x}{2}} + C.$$

DÉVELOPPEMENT DE L'INTÉGRALE $\sum u$ EN SÉRIES.

290. Euler a fait dépendre l'intégrale aux différences finies $\sum u$ de l'intégrale ordinaire $\int u dx$ et des coefficients différentiels $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^3u}{dx^3}$,... etc. Voici comment il y parvient. u désignant une fonction de x , on a, d'après le théorème de Taylor,

$$\Delta u = \frac{du}{dx} \Delta x + \frac{d^2u}{dx^2} \frac{\Delta x^2}{1.2} + \frac{d^3u}{dx^3} \frac{\Delta x^3}{1.2.3} + \dots$$

et de là on déduit, en intégrant,

$$u = \Delta x \sum \frac{du}{dx} + \frac{\Delta x^2}{1.2} \sum \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{1.2.3} \sum \frac{d^3u}{dx^3} + \dots$$

Si l'on désigne par u_0 la valeur de u correspondante à $x = x_0$, on aura

$$u - u_0 = \Delta x \sum \frac{du}{dx} + \frac{\Delta x^2}{1.2} \sum \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{\Delta x^3}{1.2.3} \sum \frac{d^3u}{dx^3} + \dots,$$

d'où

$$\sum \frac{du}{dx} = \frac{u-u_0}{\Delta x} - \frac{\Delta x}{1.2} \sum \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{\Delta x^2}{1.2.3} \sum \frac{d^3u}{dx^3} - \dots,$$

et cette expression, par le changement de u en $\int_{x_0}^x u dx$, conduira à la suivante :

$$(1) \quad \sum u = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^x u dx - \frac{\Delta x}{1.2} \sum \frac{du}{dx} - \frac{\Delta x^2}{1.2.3} \sum \frac{d^2u}{dx^2} - \dots$$

On aura ensuite, en remplaçant successivement dans la même expression u par $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, etc.

$$\begin{aligned} \sum \frac{d^2u}{dx^2} &= \frac{1}{\Delta x} \frac{du}{dx} - \frac{\Delta x}{1.2} \sum \frac{d^3u}{dx^3} - \frac{\Delta x^2}{1.2.3} \sum \frac{d^4u}{dx^4} - \dots, \\ \sum \frac{d^3u}{dx^3} &= \frac{1}{\Delta x} \frac{d^2u}{dx^2} - \frac{\Delta x}{1.2} \sum \frac{d^4u}{dx^4} - \frac{\Delta x^2}{1.2.3} \sum \frac{d^5u}{dx^5} - \dots \end{aligned}$$

Maintenant, si au moyen de ces équations on élimine successivement, de la valeur de $\sum u$, celles $\frac{du}{dx}$, $\frac{d^2u}{dx^2}$, $\frac{d^3u}{dx^3}$, etc., on obtiendra un résultat de la forme

$$(2) \quad \sum u = \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^x u dx - \frac{u-u_0}{2} + A\Delta x \frac{du}{dx} + B\Delta x^2 \frac{d^2u}{dx^2} + \dots$$

Pour déterminer les coefficients $A, B, C \dots$ que contient cette équation, nous poserons

$$u = e^x,$$

d'où

$$\sum e^x = \frac{e^x}{e^{\Delta x} - 1}, \quad \int_{x_0}^x e^x dx = e^x - e^{x_0}, \quad \frac{du}{dx} = e^x, \quad \frac{d^2u}{dx^2} = e^x \dots \frac{d^nu}{dx^n} = e^x,$$

et substituant ces valeurs dans l'équation (2), puis divisant par e^x , nous aurons

$$\frac{1}{e^{\Delta x} - 1} = \left(\frac{1}{\Delta x} - \frac{1}{2} + A\Delta x + B\Delta x^2 + C\Delta x^3 + \dots \right).$$

Le développement du premier membre fait connaître les coefficients A, B, C...; et il est aisé de reconnaître que tous ceux qui multiplient les puissances paires de Δx seront nuls.

En effet, si l'on fait passer le terme $-\frac{1}{2}$ dans le premier membre, on aura

$$\frac{1}{e^{\Delta x} - 1} + \frac{1}{2} = -\frac{1}{e^{-\Delta x} - 1} - \frac{1}{2} = \frac{e^{\Delta x}}{e^{\Delta x} - 1} - \frac{1}{2},$$

expression qui demeure la même quand on change Δx en $-\Delta x$. On aura donc d'abord

$$B = 0, \quad D = 0, \quad E = 0, \text{ etc.},$$

et ensuite

$$A = \frac{1}{12}, \quad C = \frac{1}{720} \text{ etc.};$$

par conséquent

$$(3) \quad \left\{ \begin{aligned} \sum u &= \frac{1}{\Delta x} \int_{x_0}^x u dx - \frac{u - u_0}{2} \\ &+ \frac{\Delta x}{12} \left[\left(\frac{du}{dx} \right) - \left(\frac{du}{dx} \right)_0 \right] \\ &- \frac{\Delta x^3}{720} \left[\left(\frac{d^3u}{dx^3} \right) - \left(\frac{d^3u}{dx^3} \right)_0 \right], \\ &+ \text{etc.} \end{aligned} \right.$$

formule qui fait dépendre, comme on le voit, $\sum u$ de $\int u dx$,

et de $u, \frac{du}{dx}, \frac{d^3u}{dx^3} \dots$

291. On peut appliquer aux différences finies l'intégration par parties, tout comme pour les différentielles. Soient P et Q deux fonctions quelconques de la variable x ; et posons

$$\sum PQ = Q \sum P + Z,$$

Z étant une fonction de la même variable qu'il s'agit de déterminer. En prenant la différence de chaque membre de cette équation, on aura

$$PQ = (Q + \Delta Q) \sum (P + \Delta P) - Q \sum P + \Delta Z,$$

et, en développant, puis observant que $\sum \Delta P = P$,

$$0 = \Delta Q \sum (P + \Delta P) + \Delta Z,$$

d'où

$$\Delta Z = -\Delta Q \sum (P + \Delta P),$$

c'est-à-dire

$$Z = -\sum \Delta Q \sum (P + \Delta P).$$

Ainsi

$$(1) \quad \sum PQ = Q \sum P - \sum \Delta Q \sum (P + \Delta P),$$

ou en écrivant P_i au lieu de $P + \Delta P$,

$$(2) \quad \sum PQ = Q \sum P - \sum \Delta Q \sum P_i.$$

Maintenant, si dans la formule (1), on change Q en ΔQ , P en $\sum P_i$; puis que l'on observe que

$$\sum P_i + \Delta \sum P_i = \sum (P_i + \Delta P_i) = \sum P_i,$$

on trouvera

$$\sum \Delta Q \sum P_i = \Delta Q \sum^1 P_i - \sum \Delta^2 Q \sum^1 P_i,$$

en sorte que l'équation (1) deviendra

$$\sum PQ = Q \sum P - \Delta Q \sum^1 P_i + \sum \Delta^2 Q \sum^1 P_i.$$

Si dans la même formule (1), on change Q en $\Delta^1 Q$, P en $\sum^1 P$, et que l'on observe que

$$\sum^1 P_1 + \Delta \sum^1 P_1 = \sum^1 P_2,$$

on aura

$$\sum \Delta^1 Q \sum^1 P_1 = \Delta^1 Q \sum^1 P_1 - \sum \Delta^1 Q \sum^1 P_2,$$

en sorte que l'équation (2) deviendra

$$\sum PQ = Q \sum P - \Delta Q \sum^1 P_1 + \Delta^1 Q \sum^1 P_1 - \sum \Delta^1 Q \sum^1 P_2.$$

D'après cela, on aura donc généralement

$$\sum PQ = Q \sum P - \Delta Q \sum^1 P_1 + \Delta^1 Q \sum^1 P_1 - \Delta^1 Q \sum^1 P_2 + \Delta^1 Q \sum^1 P_2 - \text{etc.},$$

expression que l'on peut écrire sous la forme plus symétrique

$$\begin{aligned} \sum PQ = Q \sum P - \Delta Q \left(\sum^1 P + \sum P \right) \\ + \Delta^1 Q \left(\sum^1 P + {}_2 \sum^1 P + \sum P \right) \\ - \Delta^1 Q \left(\sum^1 P + {}_3 \sum^1 P + {}_3 \sum^1 P + \sum P \right) + \text{etc.} \end{aligned}$$

Cette expression s'arrête lorsque les différences d'un ordre quelconque de la fonction Q deviennent constantes.

CHAPITRE III.

DE L'INTERPOLATION.

FORMULE DE NEWTON.

292. Connaissant un certain nombre de valeurs d'une fonction u de x correspondantes à des valeurs données de cette variable, l'objet qu'on se propose, dans le problème de l'interpolation, est de déterminer les valeurs de cette fonction qui répondent à des valeurs intermédiaires de x .

Soit donc un nombre $n + 1$ de valeurs données de x

$$x_0, x_1, x_2, x_3 \dots x_n,$$

correspondantes à des valeurs également données de u

$$u_0, u_1, u_2, u_3 \dots u_n,$$

et supposons que les valeurs de x croissent par intervalles constants et égaux à Δx .

D'après la formule du n° (276), on aura

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} u_n = & u_0 + n\Delta u_0 + \frac{n(n-1)}{1.2} \Delta^2 u_0 \\ & + \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} \Delta^3 u_0 + \dots + \Delta^n u_0; \end{aligned} \right.$$

et si la fonction u est une fonction entière et rationnelle de x , d'ordre n , la différence n^{me} de cette fonction sera constante, et cette série se terminera à $\Delta^n u_0$.

Maintenant, supposons que u_n corresponde à $x = u\Delta x$ et soit représenté par u_n : alors il faudra remplacer dans

la formule (1), n par $\frac{x}{\Delta x}$; ce qui donnera

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} u_n &= u_0 + \frac{x}{\Delta x} \Delta u_0 + \frac{\frac{x}{\Delta x} \left(\frac{x}{\Delta x} - 1 \right)}{1 \cdot 2} \Delta^2 u_0 \\ &+ \frac{\frac{x}{\Delta x} \left(\frac{x}{\Delta x} - 1 \right) \left(\frac{x}{\Delta x} - 2 \right)}{1 \cdot 2 \cdot 3} \Delta^3 u_0 + \dots + \Delta^{\frac{x}{\Delta x}} u_n. \end{aligned} \right.$$

formule au moyen de laquelle on pourra calculer facilement, à l'aide d'un certain nombre de valeurs données de u , d'autres valeurs intermédiaires de cette fonction; ce qui est l'objet qu'on se propose.

FORMULE DE LAGRANGE.

293. La formule qui précède est de Newton : elle suppose, comme nous l'avons dit, que les $n + 1$ valeurs données de la variable x croissent par degrés constants et égaux à Δx . La formule suivante due à Lagrange se rapporte au cas où les $n + 1$ valeurs $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ sont quelconques :

$$u_x = u_0 \frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_0-x_1)(x_0-x_2)\dots(x_0-x_n)} + u_1 \frac{(x-x_0)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{(x_1-x_0)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} + \dots + u_n \frac{(x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_0)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}.$$

Pour démontrer cette formule, posons :

$$(1) \quad u_s = a + bx + \gamma x^2 + \delta x^3 + \dots \mu x^n.$$

On aura pour déterminer les $n + 1$ coefficients $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \mu$ que renferme cette équation, les $n + 1$ conditions :

et, ainsi de suite. En substituant ces valeurs de $X_0, X_1, X_2, \dots$ dans l'équation (3), on aura donc la formule de Lagrange citée plus haut.

APPROXIMATION DES QUADRATURES.

294. Considérons l'intégrale définie

$$\int_a^b F(x) dx$$

qui se rapporte à l'évaluation des aires planes, en coordonnées rectangulaires, et cherchons la valeur approchée de cette intégrale ou celle de l'aire renfermée dans la courbe $y = F(x)$.

Plusieurs moyens se présentent pour y parvenir. On peut d'abord employer la formule d'Euler donnée n° (290); et l'on obtient, par ce moyen, la somme des aires des trapèzes compris entre les ordonnées successives à la courbe $y = F(x)$, les cordes de cette courbe et l'axe des x . On peut encore employer la formule d'interpolation donnée n° (292) pour représenter y ou $F(x)$; puis intégrer cette expression qui est entière et rationnelle entre des limites données, ce qui revient à faire passer la courbe dont il s'agit par une parabole de degré n , qui a $n + 1$ points communs avec elle. Enfin, on peut, au lieu de cette dernière courbe, considérer une suite de paraboles du second degré, passant par trois points de la courbe $y = F(x)$, et remplacer les parties correspondantes de l'aire cherchée par celles de ces diverses paraboles. Cette dernière méthode étant la plus simple, c'est celle que nous allons développer.

Concevons que l'intervalle $b - a$ ait été divisé en un nombre pair n de parties égales, et soient $0, \Delta x, 2\Delta x, \dots$ et $y_0, y_1, y_2, \dots$ les coordonnées des trois points de la courbe correspondant aux trois premières divisions de l'intervalle $b - a$: l'équation de la parabole du second degré passant par ces trois points

sera représentée par les trois premiers termes de l'équation (1) du n° (292), ou par

$$y = y_0 + \frac{x}{\Delta x} \Delta y_0 + \frac{x}{\Delta x} \left(\frac{x}{\Delta x} - 1 \right) \frac{\Delta^2 y_0}{2},$$

et, en prenant l'intégrale entre les limites 0 et $2\Delta x$, on aura pour l'aire du segment parabolique renfermée entre les ordonnées y_0 et y_2 ,

$$\Delta x \left(2y_0 + 2\Delta y_0 + \frac{1}{3} \Delta^2 y_0 \right),$$

ou

$$\frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2).$$

On aura de même pour l'aire parabolique comprise entre les ordonnées y_1 et y_3 ,

$$\frac{\Delta x}{3} (y_1 + 4y_2 + y_3);$$

pour celle renfermée entre les ordonnées y_2 et y_4 :

$$\frac{\Delta x}{3} (y_2 + 4y_3 + y_4),$$

et, ainsi de suite. La somme de toutes ces expressions sera la valeur approchée de l'intégrale $\int_a^b F(x) dx$ ou de l'aire renfermée dans la courbe $y = F(x)$; et l'on aura en conséquence

$$\begin{aligned} \int_a^b F(x) dx &= \frac{\Delta x}{3} (y_0 + 4y_1 + y_2) + \frac{\Delta x}{3} (y_1 + 4y_2 + y_3) + \dots \\ &\quad + \frac{\Delta x}{3} (y_{n-2} + 4y_{n-1} + y_n) \\ &= \frac{\Delta x}{3} [(y_0 + y_n) + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-2}) + 4(y_1 + y_2 + \dots + y_{n-1})] \end{aligned}$$

Cette formule est due à Thomas Simpson.

FIN DU SECOND VOLUME.

Paris. — Imprimerie Cosset et C^e, 26, rue Racine.

0111111



Fig. 6



Fig. 7

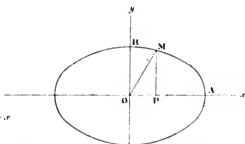


Fig. 13

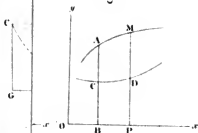


Fig. 14

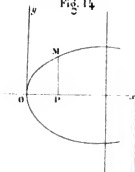


Fig. 20

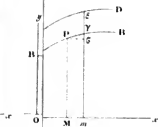


Fig. 21

